

Chap 3. 1차원 정상상태 열전도 : 전기 Ohm 법칙 유사성

3-1. 평면 벽(Plane Wall)

1) 1차원, 정상상태, 일정 열발생율($\dot{q}(x)$)의 열전도 방정식

$$\rightarrow \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + \frac{\dot{q}(x)}{k} = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.1) \rightarrow \text{열유속}(\dot{q}) \text{은 } \dot{q}(x) = -k \frac{dT(x)}{dx} \quad (3.2)$$

① 온도분포

→ 열전도 방정식 (3.1)을 두 번 적분해서 경계조건(1~3종 경계조건)을 적용하여 상수 C_1, C_2 를 구하면 온도 분포식임.

$$\rightarrow \text{즉, } \frac{dT(x)}{dx} = -\frac{\dot{q}_0}{k}x + c_1 \quad (3.4a) \quad \therefore T(x) = -\frac{\dot{q}_0}{2k}x^2 + c_1x + c_2 \quad (3.4b)$$

② 열저항 (Thermal resistance, $R_{th} \equiv R_e$) : 열저항 등가 회로도!!

→ 1D, SS, no heat source, k=const.

→ 평면벽에서 Fourier's 열전도 법칙은, $\dot{Q} = kA \frac{dT}{dx} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$ (3.5)

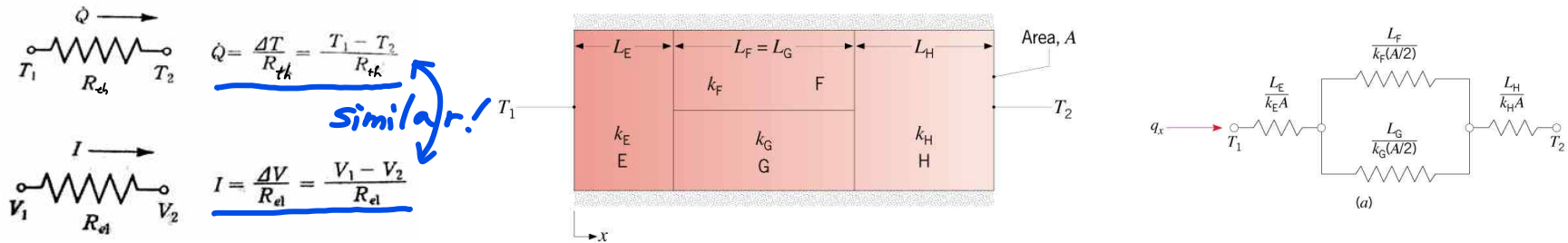
$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{kA}} \quad (3.6)$$

$$\therefore \dot{Q} = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{kA}} = \frac{\Delta T}{R_{th}} \text{ VS } I = \frac{\Delta V}{R_{el}} \quad (3.7) \leftarrow \text{전류} = \frac{\text{전압}}{\text{저항}}, \text{ 따라서 열전도에서 열저항, } R_{th} \text{는}$$

$$R_{th} = \frac{\Delta x}{kA} \quad (3.8)$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = \sum R \quad (3.9)$$

$$\dot{Q} = \frac{\text{총 온도차}}{\text{총 열저항}} = \frac{\Delta T_{Overall}}{\sum R} \quad (3.10)$$



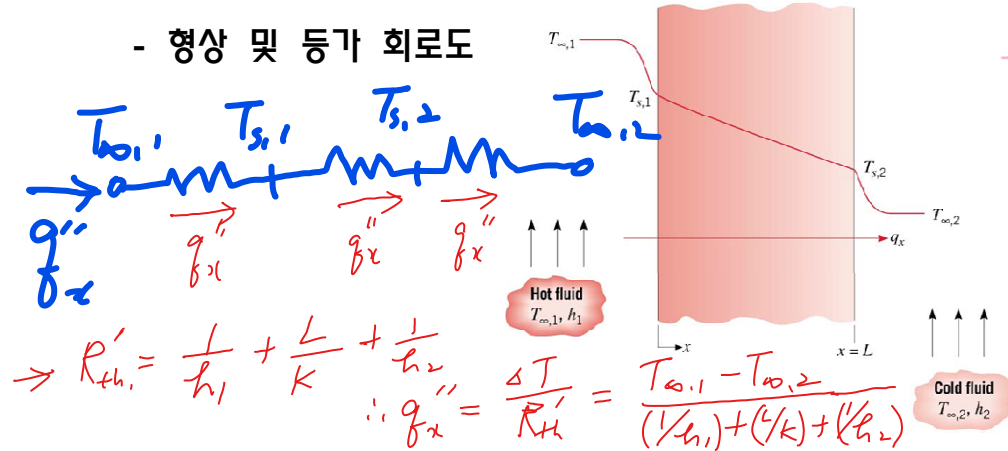
Chap 3. 1차원 정상상태 열전도 : 전기 Ohm 법칙 유사성

3-1. 평면 벽(Plane Wall)

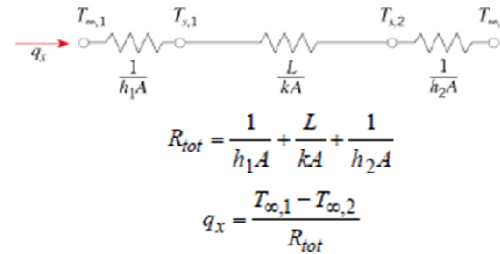
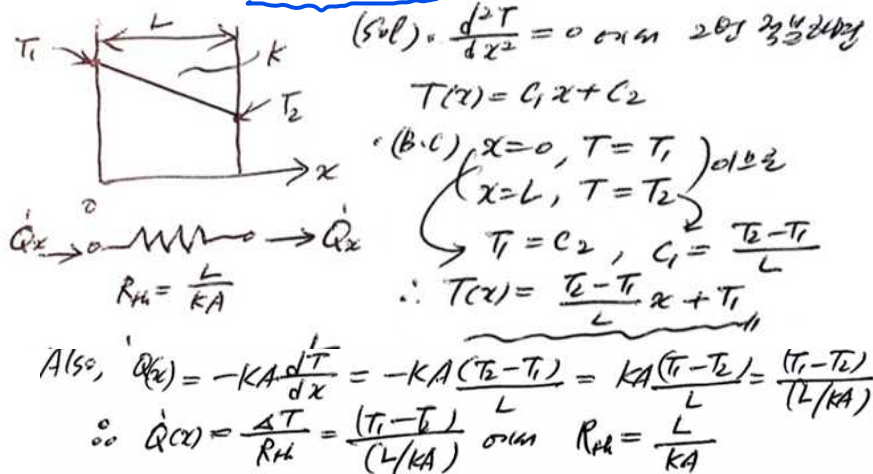
1) 1차원, 정상상태, 일정 열발생율($\dot{q}(x)$)의 열전도 방정식

③ 대류 열전달 결합의 등가 열저항 회로도

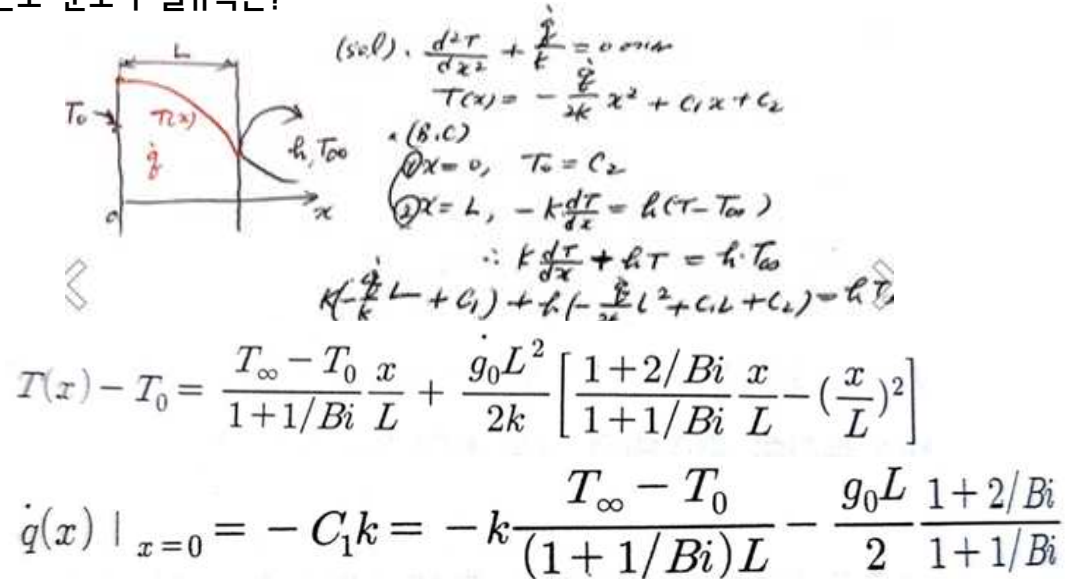
- 형상 및 등가 회로도



(예제 3.1) 평판내 열발생 없는 1차원 정상상태 온도분포와 열전달율?



(예제 3.2) 평판내 $\dot{q}(x)$ 열발생과 $x=L$ 에서 온도 T_{∞} 의 대류열전달 경계인 경우 온도 분포와 열유속은?



Chap 3. 1차원 정상상태 열전도 : 전기 Ohm 법칙 유사성

3-2. 원통 벽(Cylinder Wall)

1) 1차원, 정상상태, 일정 열발생율($\dot{q}(x)$)의 열전도 방정식

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}(r)}{k} = 0 \quad (3.13) \rightarrow \text{열유속}(\dot{q}) \text{은 } \dot{q}(r) = -k \frac{dT(r)}{dr} \quad W/m^2 (kcal/h \cdot m^2) \quad (3.14)$$

① 온도분포 \rightarrow 열전도 방정식 (3.13)을 두 번 적분해서 경계조건(1~3종 경계조건)을 적용하여 상수 C_1, C_2 를 구하면 온도 분포식임.

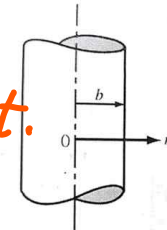
$$\rightarrow \text{즉, } \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\dot{q}_0}{2k} r + \frac{C_1}{r} \quad (3.16)$$

$$\therefore T(r) = -\frac{\dot{q}_0}{4k} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (3.17)$$

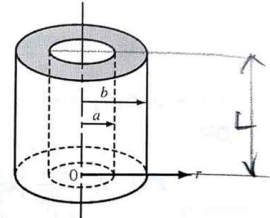
② 경계조건 및 열저항 등가 회로도! $\rightarrow ID, SS, \text{ no heat source, } k=\text{const.}$

• (BC) - 제1종 조건(Dirichlet) : $r=0$ 에서 $T(r) = \text{유한}$ (3.18a)

- 제 2종 조건(Neumann) : $r=0$ 에서 $\frac{dT(r)}{dr} = 0$ (3.18b)



(a) 속 찬 원통



(b) 속 빈 원통

(예제 3.3) 열발생 없는 길이 L인 Hollow 원통형 1차원 정상상태 온도분포와 길이 L을 통한 열저항 식은? @ $r=a, b$ 일때 T_1, T_2 임

(sol) • 2차원 방정식 : $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}_0}{k} = 0$ 임
 $\dot{q}_0 = 0$ (no heat source) $\therefore \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$
 $\therefore r \frac{dT}{dr} = C_1, \therefore T = C_1 \ln r + C_2$
 • (B.C) - $r=a$ 일때 $T=T_1, r=b$ 일때 $T=T_2$
 $T_1 = C_1 \ln a + C_2$
 $T_2 = C_1 \ln b + C_2$
 $\therefore C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln(b/a)}, C_2 = T_1 - (T_2 - T_1) \frac{\ln a}{\ln(b/a)}$
 $\therefore \frac{T(r) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$ • Also, 등가회로(L)와 열저항($\dot{q}(r)$)은
 $\dot{q}' = \frac{\dot{Q}}{L} = -k(2\pi rL) \frac{dT}{dr} = -2\pi k r L \frac{dT}{dr}$
 $\therefore \dot{q}' = -2\pi k C_1 = -2\pi k \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(b/a)} = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(b/a)} = \frac{\Delta T}{R_{th}}$
 $\text{or } \dot{Q} = \frac{\dot{Q}}{L} \times L = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(b/a)} \times 2\pi k L$ $R_{th} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi k L}$ (end)

(예제 3.4) 열발생 $\dot{q}(r)$, 짝 찬 원통형 1차원 정상상태 온도분포와 원통 중심과 경계면 사이의 온도 차($T_c - T_1$)=? @ $r=b$ 에서 T_1

(sol) • 2차원 방정식 : $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}_0}{k} = 0$ 임
 $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{q}_0}{k} r \therefore r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_0}{2k} r^2 + C_1$ 임
 $\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_0}{2k} r + \frac{C_1}{r}$
 $\therefore T(r) = -\frac{\dot{q}_0}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2$
 • (B.C) - $r=0$ $\rightarrow \frac{dT}{dr} = 0$ (Neumann Condition)
 $\frac{dT}{dr} = 0$ 일때 $C_1 = 0$
 $-r=b : T=T_1 \rightarrow -\frac{\dot{q}_0}{4k} b^2 + 0 + C_2 = T_1 \therefore C_2 = T_1 + \frac{\dot{q}_0}{4k} b^2$
 $\therefore T(r) = -\frac{\dot{q}_0}{4k} r^2 + T_1 + \frac{\dot{q}_0}{4k} b^2$
 $\therefore r=0$ 일때 $T(r) = T_c \rightarrow T_c - T_1 = \frac{\dot{q}_0 b^2}{4k} \left(1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2 \right)$
 $\therefore \frac{T(r) - T_1}{T_c - T_1} = 1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2$ \therefore 중심에서 열발생률 \dot{q}_0 가 $r=0$ 에서 최대임!!
 $T_c - T_1 = \frac{\dot{q}_0 b^2}{4k} = \frac{(1.5 \times 10^6) \times (0.02)^2}{4 \times 17} = 13.8 \text{ } ^\circ\text{C}$ (end)

$$R_{th} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L}$$

$$R'_{th} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k}$$

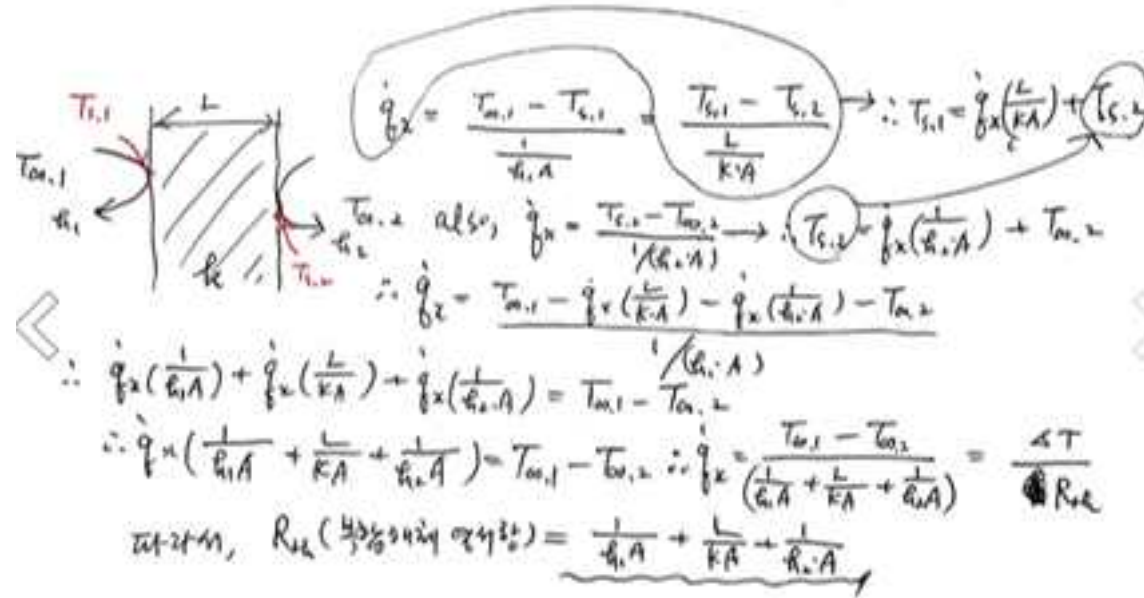
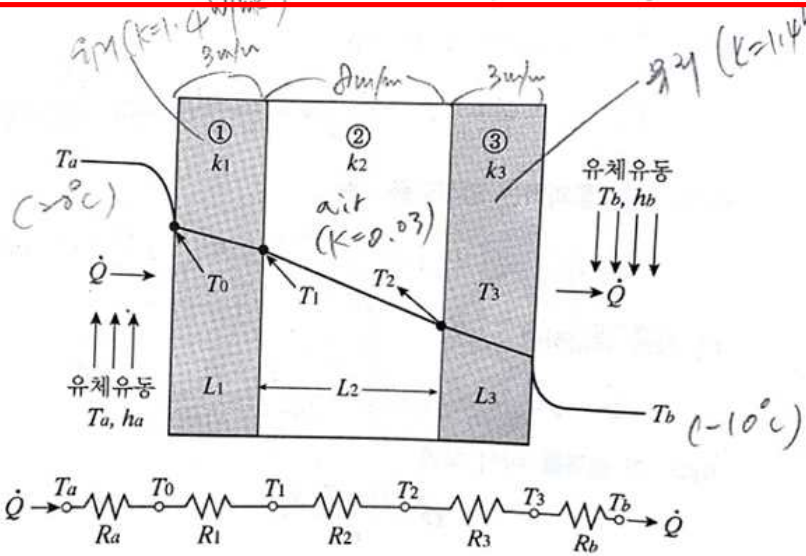
$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{s,2}, \quad \dot{Q} = -kA \frac{dT}{dr} = -k \cdot (2\pi r L) \cdot \frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \frac{1}{r} = \frac{2\pi k L (T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln(r_2/r_1)}$$

Chap 3. 1차원 정상상태 열전도 : 전기 Ohm 법칙 유사성

3-4. 복합매체

1) 1차원, 정상상태, 복합평판 열전도 방정식

$$\dot{Q} = \frac{T_a - T_0}{R_a} = \frac{T_0 - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \frac{T_2 - T_3}{R_3} = \frac{T_3 - T_b}{R_b} \quad (3.27)$$



3.5 직렬 3개 벽면 복합체와 등가열저항 회로

$$\dot{Q} = UA(T_a - T_b) \quad W(kcal/h) \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_a} + \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} + \frac{1}{h_b} \quad (3.33)$$

$$\dot{Q} = \frac{T_a - T_b}{R} \quad W(kcal/h) \quad (3.29)$$

Chap 3. 1차원 정상상태 열전도 : 전기 Ohm 법칙 유사성

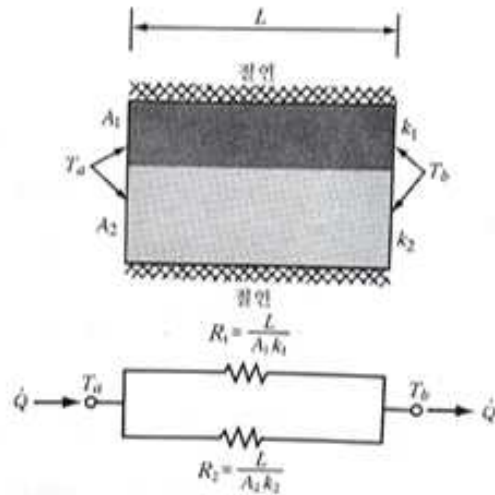


그림 3.6 두 개의 재료가 평행으로 된 벽과 등가 열저항 회로

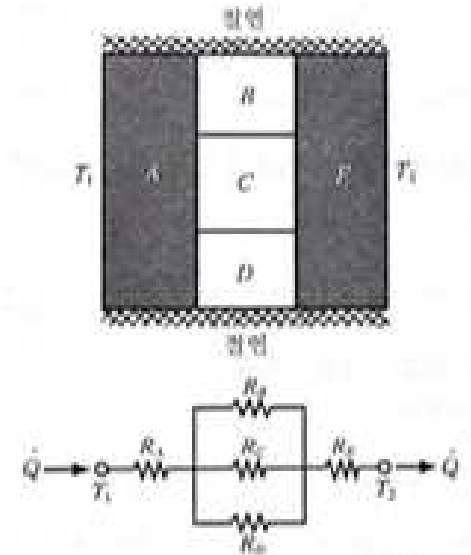


그림 3.7 복합 벽을 1차원 열유동으로 가정한 등가 열저항 회로

$$R = R_A + \frac{1}{\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D}} + R_E \quad (3.34)$$

Chap 3. 1차원 정상상태 열전도 : 전기 Ohm 법칙 유사성

3-4. 복합매체

2) 1차원, 정상상태, 복합 동심 원통형 열전도 방정식

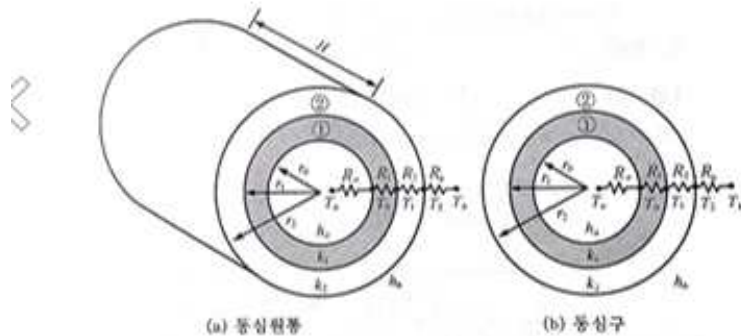


그림 3.8 완전한 열접촉을 가진 속 빈 복합 원통 및 구를 통한 반지름방향의 열유동에 대한 열저항

$$\dot{Q} = \frac{T_a - T_0}{R_a} = \frac{T_0 - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \frac{T_2 - T_b}{R_b} \quad (3.35)$$

$$R_a = \frac{1}{2\pi r_0 H h_0}, \quad R_1 = \frac{\ln(r_1/r_0)}{2\pi H k_1}$$

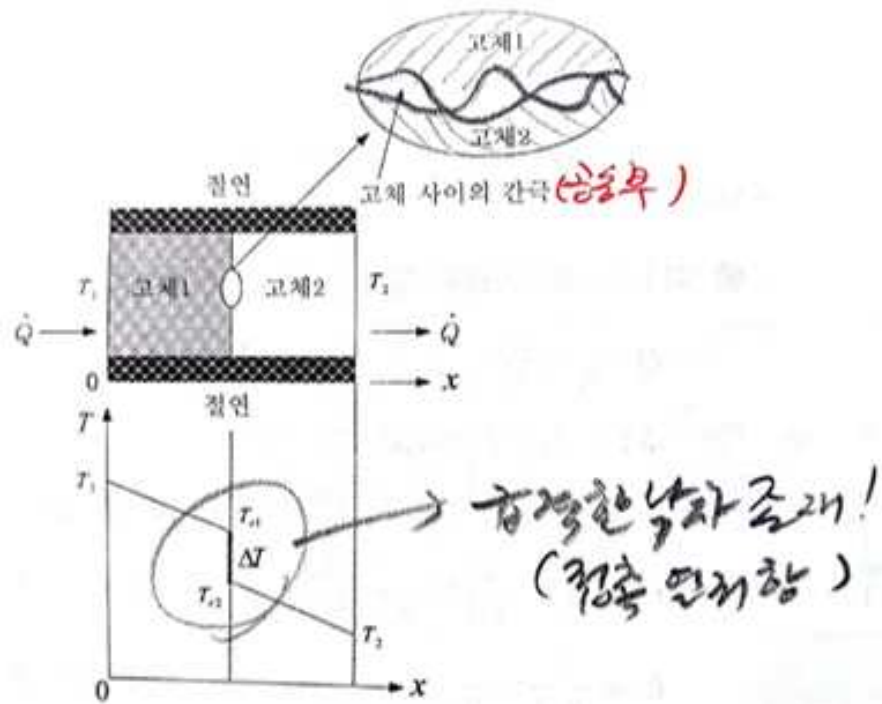
$$R_2 = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi H k_2}, \quad R_b = \frac{1}{2\pi r_2 H h_b} \quad (3.36)$$

$$\dot{Q} = \frac{T_a - T_b}{R} \quad W(kcal/h) \quad (3.37a)$$

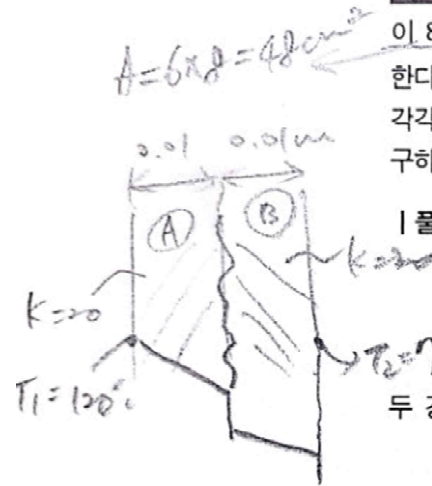
$$R = R_a + R_1 + R_2 + R_b \quad (3.37b)$$

Chap 3. 1차원 정상상태 열전도 : 전기 Ohm 법칙 유사성

3-5. 접촉 열저항 : R_{contact}



$$R_c = \frac{1}{h_c A} \quad (3.41)$$



예제 3.9 두 개의 직육면체의 스테인레스 강판($k=20 \text{ W/mK}$)은 각각 두께 1cm, 길이 8cm, 폭 6cm의 크기를 갖는다. 이 두 강판을 20atm의 압력으로 서로 접촉시켜 압축한다. 접촉면압력에 대한 접촉계수는 $h_c = 10,000 \text{ W/m}^2\text{K}$ 이며, 양 단의 표면 온도가 각각 120°C 와 70°C 이다. ① 결합체를 통과하는 열유동율, ② 접촉면에서의 온도강하를 구하라.

| 풀이 | ① 열유동율을 열저항 개념으로 구하면

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_1 + R_c + R_2} \quad \text{W}$$

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 120 - 70 = 50^\circ\text{C}$$

두 강판의 열저항은 동일하며 열접촉저항은 다음과 같다.

$$R_1 = R_2 = \frac{dx}{kA} = \frac{0.01}{20 \cdot 0.08 \times 0.06} = 0.1042 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

$$R_c = \frac{1}{h_c A} = \frac{1}{10,000 \cdot 0.08 \times 0.06} = 0.02083 \text{ }^\circ\text{C/W}$$

따라서, 통과 열유동율은 다음과 같다.

$$\dot{Q} = \frac{50}{0.1042 + 0.02083 + 0.1042} = 218 \text{ W}$$

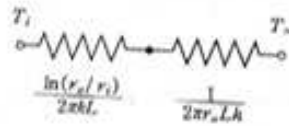
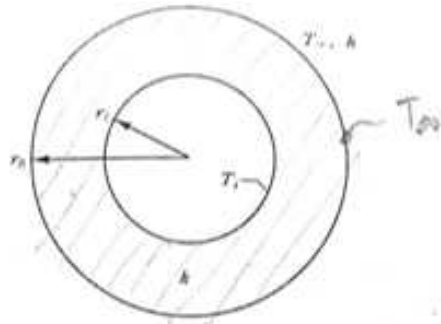
② 접촉면의 온도강하

$$\Delta T_c = \frac{R_c}{R_1 + R_c + R_2} \Delta T = \frac{0.02083}{0.1042 + 0.02083 + 0.1042} \times 50 = 4.54^\circ\text{C}$$

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_1 + R_c + R_2} = \frac{\Delta T_c}{R_c} \therefore \Delta T_c = \frac{R_c}{R_1 + R_c + R_2} \cdot \Delta T$$

Chap 3. 1차원 정상상태 열전도 : 전기 Ohm 법칙 유사성

3-6. 임계 단열 반경 : $R_{critical}$



$$\therefore R'_{tot} = \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi r_o h}$$

$$\therefore \dot{q}' = \frac{T_o - T_i}{R'_{tot}}$$

$$\frac{d\dot{Q}}{dr_o} = \frac{-2\pi L(T_i - T_o)\left(\frac{1}{kr_o} - \frac{1}{hr_o^2}\right)}{\frac{\ln(r_o/r_i)}{k} + \frac{1}{r_o h}} = 0 \quad (3.43)$$

$$r_o = r_c = \frac{k}{h} \quad (3.44)$$

그림 3.10 임계 단열재 반지름을 유도하기 위한 1차원 전기회로

$$\therefore r_o = r_c = \frac{k}{h} \leftarrow \frac{1}{2\pi k r_o} - \frac{1}{2\pi r_o^2 h} = 0 \leftarrow \frac{dR'_{tot}}{dr_o} = 0$$

Chap 2. 전도- 기본 방정식

2-2. 경계 조건

1) 일정표면조건(제1종 경계조건) : Dirichlet 조건

→ 경계면에서 온도가 지정되는 조건

$$\rightarrow T(x,t) |_{x=0} = T(0,t) = T_1 \quad (2.33a)$$

$$T(x,t) |_{x=L} = T(L,t) = T_2 \quad (2.33b)$$

2) 일정표면 열유속 경계조건(제2종 경계조건) : Neumann 조건

→ 표면에서 열유속(\dot{q} , q'')이 고정되는 경우, 즉, 일정 열유속 조건

$$\rightarrow \dot{q}_0 = -k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} |_{x=0} \quad (2.34a)$$

$$\dot{q}_L = +k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} |_{x=L} \quad (2.34b)$$

3) 대류 경계조건(제3종 경계조건) : Surface 조건

→ 매질 표면 경계조건, 즉, Convection surface condition

(대류에 의해) = (전도에 의해)
(들어오는 열) = (나가는 열)

$$h [T_1 - T(x,t) |_{x=0}] = -k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} |_{x=0} \quad (2.35a)$$

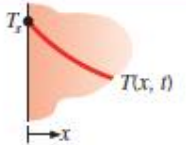
(전도에 의해) = (대류에 의해)
(들어오는 열) = (나가는 열)

$$+k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} |_{x=L} = h_2 (T_2 - T(x,t) |_{x=L}) \quad (2.35b)$$

TABLE 2.2 Boundary conditions for the heat diffusion equation at the surface ($x = 0$)

1. Constant surface temperature

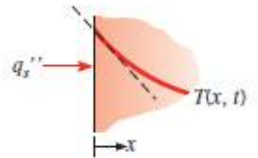
$$T(0, t) = T_s \quad (2.31)$$



2. Constant surface heat flux

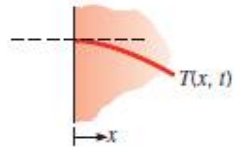
(a) Finite heat flux

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = \dot{q}_s \quad (2.32)$$



(b) Adiabatic or insulated surface

$$\frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = 0 \quad (2.33)$$



3. Convection surface condition

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} = h [T_\infty - T(0, t)] \quad (2.34)$$

