Chap 2. 전도- 기본 방정식

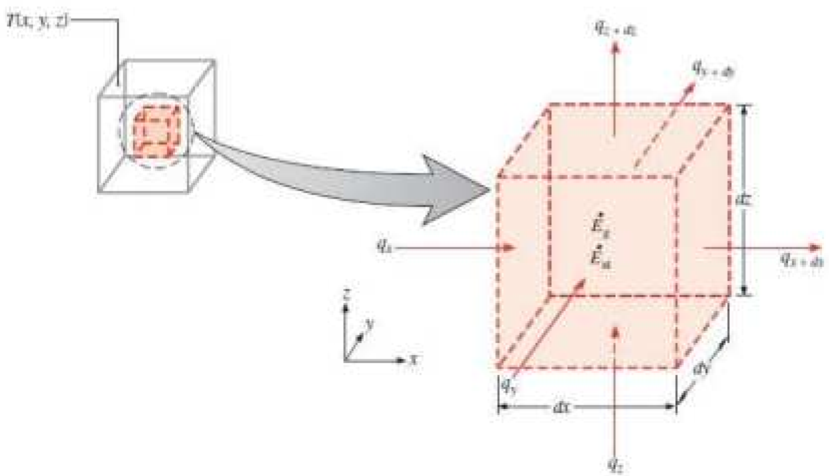
2-1. 열전달 방식과 메카니즘

1) 직교좌표계(x, y, z)

→ 매질 내 온도 분포는 열전도 미분방정식과 경계조건(초기 및 경계)을 풀어서 구함

→ 매질 내 좌표축과 평행한 미소 검사체적(dxdydz(=dv))를 정의한 후, 미소체적 내 열역학 1법칙(에너지보존) 적용

● 직교 좌표계에서 열전도에 대한 미소 검사체적과 열역학 1법칙 적용도



$$\left(\begin{array}{c}\text{검사체적으로 들어가는} \\ \text{정미 열취득률} \\ \text{I}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{검사체적 내에서} \\ \text{에너지 발생률} \\ \text{II}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{검사체적의} \\ \text{내부에너지 증가율} \\ \text{III}\end{array}\right) \quad (2.4)$$

① 전도에 의한 정미 열취득률(I)

$$\dot{Q}_x = -k\,dydz\frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.5a) \qquad \dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x}dx \quad (2.5b)$$

따라서, x-방향으로 전도에 의한 정미 열전달율은 들어오는 양(율)과 나가는 양(율)의

$$x\text{방향} \quad \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} = -\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x}dx = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\,dxdydz\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dv \quad (2.6a)$$

dxdydz

같은 방법으로 y, z-방향으로의 정미 열전달율을 구하면,

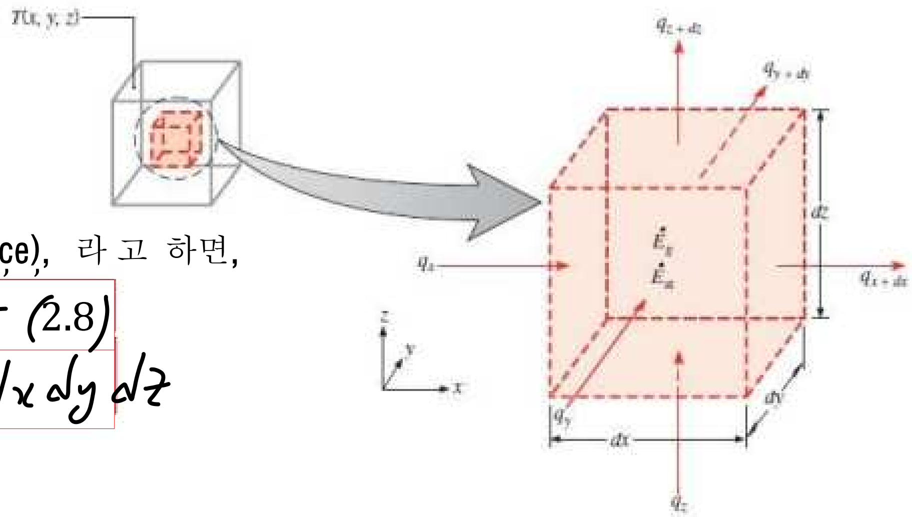
$$y\text{방향} \quad \dot{Q}_y - \dot{Q}_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdydz \quad (2.6b) \qquad z\text{방향} \quad \dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dxdydz \quad (2.6c)$$

따라서, 전도에 의해 미소 검사체적에 들어가는 정미 열전달양(율), I는

$$\boxed{\text{I} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]dxdydz \quad (2.7)}$$

Chap 2. 전도- 기본 방정식

2-1. 열전달 방식과 메카니즘



② 미소체적 내 열에너지 발생율(II) : $II = \dot{g}\,dx\,dy\,dz$

매질 내 단위시간 당, 단위 체적 당 열에너지가 발생하는 소스(source), 라 고 하면,

미소체적(검사체적) 내 열에너지 발생율(II)은 $II = \dot{g}\,dx\,dy\,dz$ (2.8)

③ 내부에너지 증가율(III), 열에너지 저장율 : III=-(2.9) $-\rho c \frac{dT}{dt}\,dx\,dy\,dz$

∴ 직교 좌표축에서 에너지 평형식, 즉 열전도 방정식은

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{g}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.10)}$$

여기서, ρ: 밀도 (kg/m 3), : 단위시간, 단위체적 당 열 발생율(W/m 3)

④ 직교좌표축에서 조건에 따른 열전도 방정식

- 전도 열전달계수(열전도율)가 일정하고, 내부 열발생이 없는 경우 $\dot{g}=0$: $\boxed{\rightarrow \nabla^2 T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \cdots (2.14)}$

- 내부 열발생이 있고, 정상상태인 경우 : $\frac{\partial T}{\partial t}=0 \rightarrow$ $\boxed{\nabla^2 T + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (2.15a) \rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (2.15b)}$

- 정상상태 내부 열발생이 없는 경우 : 0 , $\frac{\partial T}{\partial t}= 0$, $\dot{g}=0$

$$\boxed{\rightarrow \nabla^2 T = 0 \quad (2.16a) \rightarrow \text{특히 1차원인 경우, } \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (2.16b)}$$

→ chap. 3장

Chap 2. 전도- 기본 방정식

2-1. 열전달 방식과 메카니즘

2) 원통 좌표계(r, ! ,z)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varnothing^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\dot{g}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.23)$$

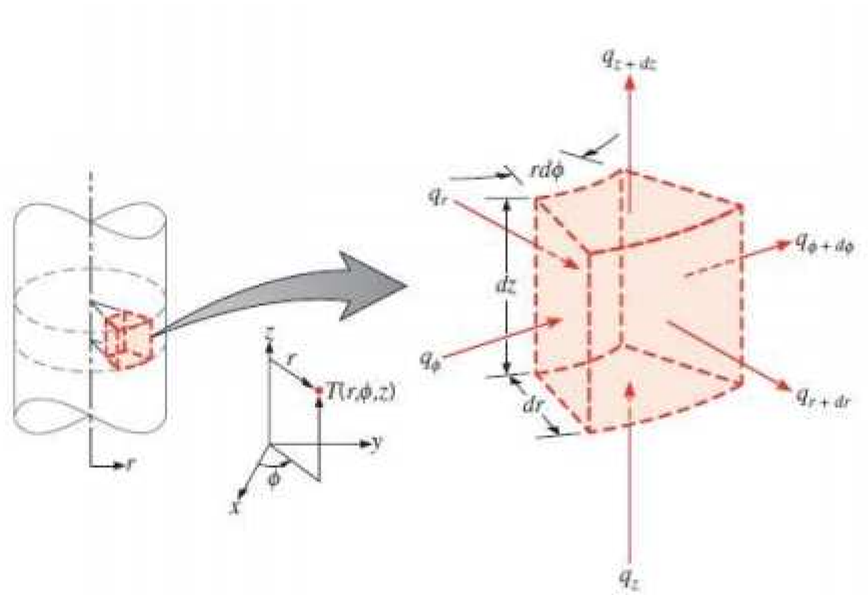


FIGURE 2.12 Differential control volume, $dr \cdot r\,d\phi \cdot dz$, for conduction analysis in cylindrical coordinates (r, ϕ, z).

❖ 1차원, 비정상, 일정 열전도율에서 열전도 방정식(요약)

① 직교 좌표계 : 온도(T)는 x-방향과 시간에 따라서만 변함

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\dot{g}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.30)$$

→ $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=0,\quad \dot{g}=0\right)$ → $\frac{d^2 T}{dx^2}=0$ ← 3장 문제

② 원통 좌표계 : 온도(T)는 r-방향과 시간에 따라서만 변함

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.31)$$

Chap 2. 전도- 기본 방정식

2-2. 경계 조건

(ex) 상변화가 있는 물체 표면

1) 일정표면조건(제1종 경계조건) : Dirichlet 조건

→ 경계면에서 온도가 지정되는 조건

$$\rightarrow \quad T(x,t)\,|_{x=0} = T(0,t) = T_1 \qquad (2.33a)$$

$$T(x,t)\,|_{x=L} = T(L,t) = T_2 \qquad (2.33b)$$

(ex) heater or 단열

2) 일정표면 열유속 경계조건(제2종 경계조건) : Neuemann 조건

→ 표면에서 열유속(# , q'')이 고정되는 경우, 즉, 일정 열유속 조건

$$\rightarrow \quad \dot{q}_0 = -k\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} \qquad (2.34a)$$

$$\dot{q}_L = +k\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=L} \qquad (2.34b)$$

3) 대류 경계조건(제3종 경계조건) : Surface 조건

→ 매질 표면 경계조건, 즉, Convection surface condition

$$\begin{pmatrix}\text{대류에 의해}\\ \text{들어오는 열}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{전도에 의해}\\ \text{나가는 열}\end{pmatrix}$$

$$h\left[T_1 - T(x,t)\,|_{x=0}\right] = -k\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} \qquad (2.35a)$$

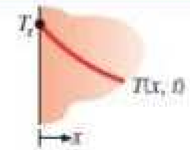
$$\begin{pmatrix}\text{전도에 의해}\\ \text{들어오는 열}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{대류에 의해}\\ \text{나가는 열}\end{pmatrix}$$

$$+k\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=L} = h_2\left(T_2 - T(x,t)\right)\,|_{x=L} \qquad (2.35b)$$

TABLE 2.2 Boundary conditions for the heat diffusion equation at the surface ($x = 0$)

1. Constant surface temperature

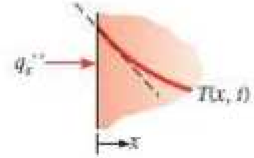
$$T(0,t) = T_s \qquad (2.31)$$



2. Constant surface heat flux

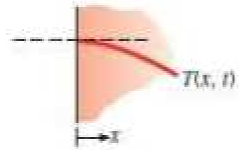
(a) Finite heat flux

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_s'' \qquad (2.32)$$



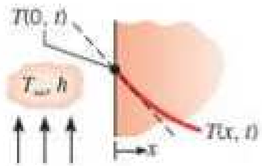
(b) Adiabatic or insulated surface

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad (2.33)$$

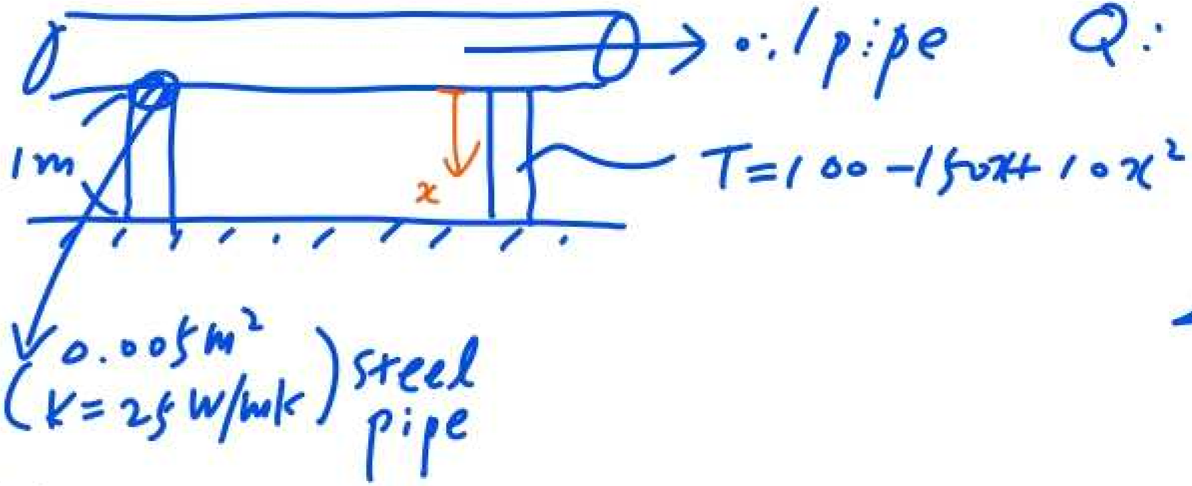


3. Convection surface condition

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = h[T_\infty - T(0,t)] \qquad (2.34)$$



(ex1)



Q: 축-pipe 자신의
접합부(x=0)와
축 끝단면(x=L)에서의
열전달 $\dot{Q}=?$

(sol) 1) 온도: $T(x)=100-150x+10x^2$ 이므로

$$T(0)=100^\circ C, \quad T(L)=T(1)=100-150+10=-40^\circ C$$

2) $$\dot{Q}=-kA\frac{dT}{dx}=-kA(-150+20x)$$

$$\therefore \begin{cases} \dot{Q}_{x=0}=-25\,\frac{W}{mK}\times 0.005\,m^2\times\left(\frac{-150}{m}\right)=18.75\,W \\ \dot{Q}_{x=1}=-25\,\frac{W}{mK}\times 0.05\,m^2\times\frac{(-150+20)}{m}=16.25\,W \end{cases}$$

(ex2) $K = 50\,W/mK$, 두께 $50\,mm$ 인 1D 벽(Wall)에서
정상상태 온도분포가 $T(°C) = a + bx^2$; $\left(\begin{array}{l} a = 200\,°C \\ b = -2000\,°C/m^2 \end{array}\right)$

(a) 벽내부 열발생율 $\dot{q} = ?$

(b) 두벽면에서 $\dot{q}'' = ?$

(sol) (a) $\dfrac{d^2T}{dx^2} + \dfrac{\dot{q}}{k} = 0$ 에서 $\dfrac{d^2T}{dx^2} = 2b$

$\therefore \dfrac{\dot{q}}{k} = -\dfrac{d^2T}{dx^2} = -2b \quad \therefore \dot{q} = -2bk = -2\times(-2000)\times 50$

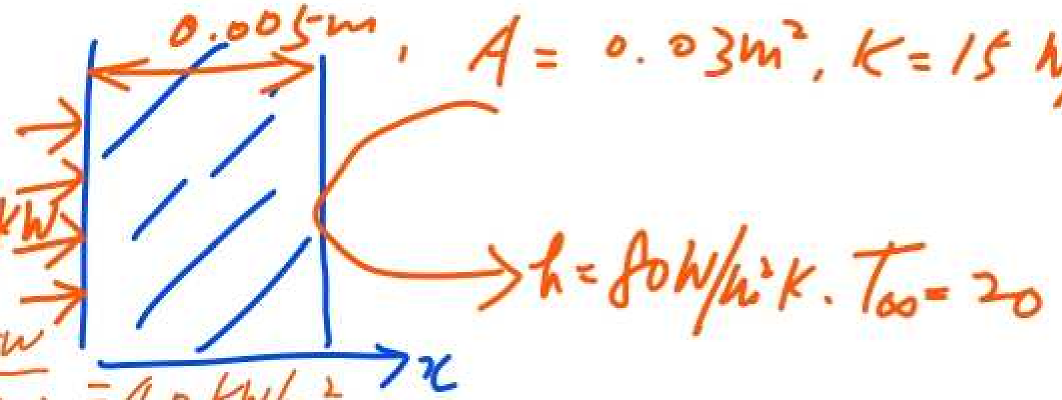
$= \underline{2\times10^5\,(W/m^3)}$

(b) $\left(\begin{array}{l} \dot{q}''\Big|_{x=0} = -k\dfrac{dT}{dx} = -k(2bx) = 0 \\ \dot{q}''\Big|_{x=50mm} = -k(2bx) = -2bk\times0.05 = 10\,kW/m^2 \end{array}\right.$

$\therefore \cancel{\dot{E}_{in}}^{\,0} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = 0 \xrightarrow{} \dot{q}\cdot L \quad \therefore \dot{q} = \dfrac{\dot{E}_{out}}{L} = \dfrac{10\,kW/m^2}{0.05\,m} = \underline{\underline{2\times10^5}}$

same!

Ex 2.3



$\dot{Q}_0 = 1.2\,kW$

$\dot{q}_0 = \dfrac{1.2\,kW}{0.03\,m^2} = 40\,kW/m^2$

(1) $T(x) = ?$

(2) $T(0)$, $T(0.005) = ?$

(Sol) S.S. No heat source, 1-D

$$\rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0, \quad \frac{dT}{dx} = C_1, \quad \underline{\underline{T(x) = C_1 x + C_2}}$$

(B.C) $x = 0$: $-k\dfrac{dT}{dx} = \dot{q}_0 \Rightarrow -kC_1 = \dot{q}_0 \quad \therefore C_1 = -\dfrac{\dot{q}_0}{k}$

$x = L$: $-k\underbrace{\dfrac{dT}{dx}}_{C_1} = h(\underbrace{T(L)}_{C_1L + C_2} - T_\infty) \quad \therefore -kC_1 = h(C_1L + C_2) - T_\infty$

$$\rightarrow \boxed{C_2 = T_\infty - \frac{C_1 k}{h} - C_1 L} \text{ 이다}$$

$C_1 = -\dfrac{\dot{q}_0}{k}$ 이므로 $\therefore T(x) = -\dfrac{\dot{q}_0}{k}x + T_\infty - C_1\left(\dfrac{k}{h} + L\right) =$

$$\boxed{T_\infty + \dot{q}_0\left(\frac{L - x}{k} + \frac{1}{h}\right)} \Leftarrow -\frac{\dot{q}_0}{k}x + T_\infty + \frac{\dot{q}_0}{k}\left(\frac{k}{h} + L\right)$$

$\therefore T(0) = T_\infty + \dot{q}_0\left(\dfrac{L}{k} + \dfrac{1}{h}\right)$

$= \underline{\underline{533(^\circ C)}}$

$T(L) = \underline{\underline{520(^\circ C)}}$

(EX4) 두께 2L = 40mm, k = 5 W/mK 평면체
$\dot{q}$ = const., 평판벽 양쪽 표면 (x = +L, -L)에서
T_∞ = 20°C 유체에 노출됨. 정상상태 조건에서
벽체내 온도분포 $T(x) = a + bx + cx^2$
where, $a = 82°C$, $b = -210°C/m$
$c = -2\times10^4\ K/m^2$ 이고 x 단위는 m이고
x 좌표의 원점은 벽 중심면이다.

(a) 이 평면벽의 온도분포를 스케치하고 그으로 온도를 표시하라

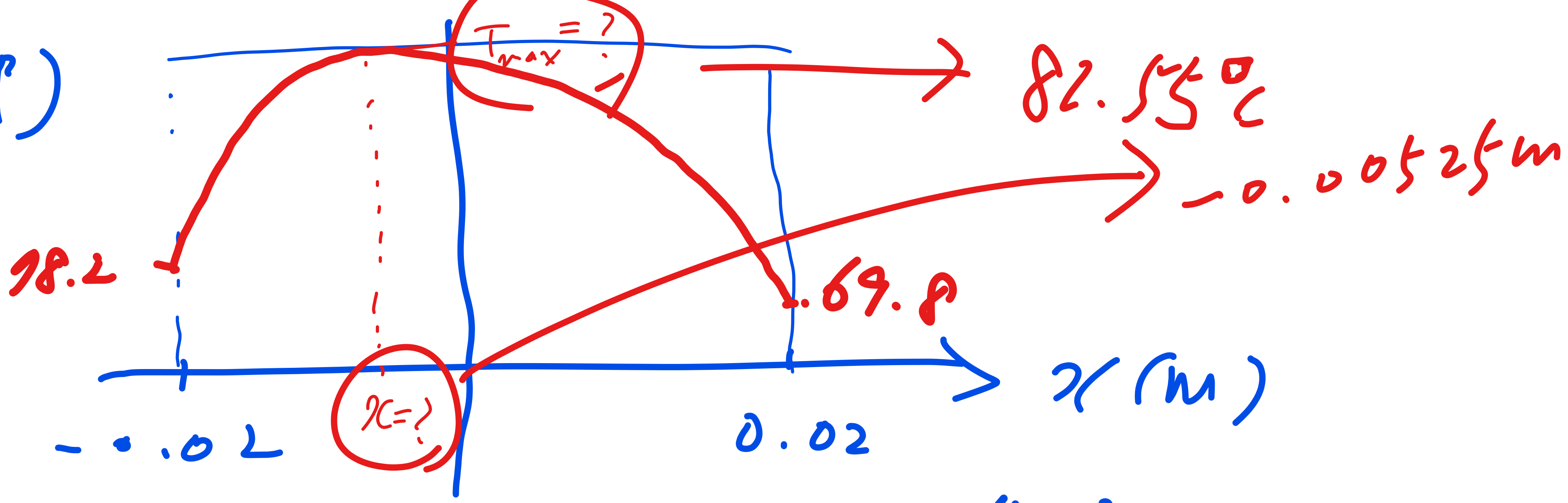
(b) 벽체에서 체적 열발생 $\dot{q}$ = ?

(c) 벽의 양표면, 즉, $x = +L$, $-L$ 에서 $\dot{q}''_x(+L)$, $\dot{q}''_x(-L) = ?$ 그리고 이 열유속은 (b)에서 구한 $\dot{q}$ 와 어떤 관계인가?

(d) 벽의 양표면에서 대류열전달계수는 각각 얼마인가?

(e) 열유속분포에 대한 $\dot{q}''(x) = ?$ 어느위치에서 $\dot{q}''(x) = 0$ 인가? 즉, 이 평면벽 내부에서 최대온도 최대온도 발생지점은?

(a)



$T = a + bx + cx^2 = 82 - 210x - 2\times10^4 x^2$ m/m

$\therefore \begin{cases} T(+0.02) = 82 - 210\times(0.02) - 2\times10^4(0.02)^2 = \underline{69.8\ (°C)} \\ T(-0.02) = 82 - 210\times(-0.02) - 2\times10^4\times(-0.02)^2 = \underline{98.2\ °C} \end{cases}$

(b) 1차원, 정상상태, 열방정식

$\rightarrow\ k\dfrac{d^2T}{dx^2} + \dot{q} = 0,\quad \dfrac{d^2T}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dT}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}(b + 2cx)$

$= \underline{2c},$

$\therefore \dot{q} = -k\dfrac{d^2T}{dx^2} = -k\times(2c)$

$= 5\,\dfrac{W}{mK} \times 2\times(-2\times10^4)\dfrac{K}{m^2} = 200\,\underline{\dfrac{kW}{m^3}}\,//$

(c) $\dot{q}''_{gx}(+L) = -k\dfrac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = -k(b+2cx)_{x=0.02} = -k(-210 - 2\times 2\times 10^4 \times 0.02)$

$= 5{,}050\ W/m^2$

$\dot{q}''_{gx}(-L) = -k(-210 - 2\times 10^4 \times (-0.02)) = -2{,}950\ W/m^2$

$\therefore\ \dot{q}''_{gx}(-L) - \dot{q}''_{gx}(+L) + 2\dot{q}_g L = -2{,}950 - 5{,}050 + 2\times 200000 \times 0.04$

$= 0$ ∴ 열역학 1법칙 만족!!

(d) RHS: $5050 = h_R(T(0.02) - 293) \rightarrow h_R = 101\ W/m^2K$

LHS: $-2950 = h_L(293 - T(-0.02)) \rightarrow h_L = 51\ W/m^2K$

(e) $\dot{q}''_{gx}(x) = -k\dfrac{dT}{dx} = -k\dfrac{d}{dx}(a+bx+cx^2) = -k(b+2cx)$

$= -5\times(-210 + 2\times(-2\times 10^4)x)$ 임!

$\therefore\ \dot{q}''_{gx} = 0 = 1050 + 2\times 10^5 x$ 에서

$x = -5.25\times 10^{-3} = -5.25\ mm$

$\therefore\ T_{max} = T(-0.00525) = 82 - 210x - 2\times 10^4 x^2$

$= 82 - 210\times(-0.00525) - 2\times 10^4 \times (-0.00525)^2 = 82.55°C$