Chap 4. 1차원 비정상 열전도 : T=T(x, t) or T(r, t)

❖ Introduction

● 1차원, 비정상상태, 일정 열발생율($\dot{g}(x)$)의 열전도 방정식

→ $$\frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{\dot{g}(x)}{k} = \rho c_p \frac{dT}{dt}$$ (2.10) : 직교 좌표계, $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{g}(r)}{k} = \rho c_p \frac{dT}{dt}$$ (2.23) : 원통 좌표계

▪ 비정상 열전도 발생은 계의 열적 경계조건 변화에 의해서 발생됨!

→ 문제 해결을 위해서는 경계조건(bc) 외 초기조건(순간 온도 조건)이 필요함

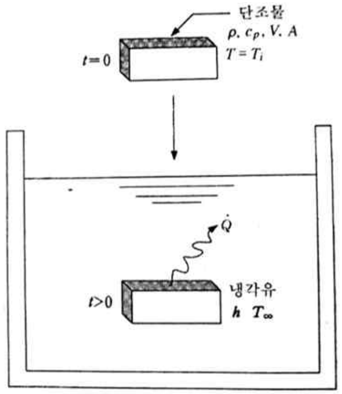
→ 비정상 열전도 문제는 온도 구배가 반듯이 존재하는 것은 아니며, 온도가 시간에 따라 변하는 현상임, 물론 공간도..

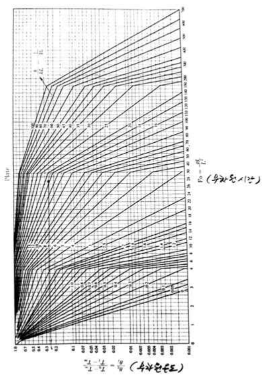
● 4장 비정상 전도 열전달 구성

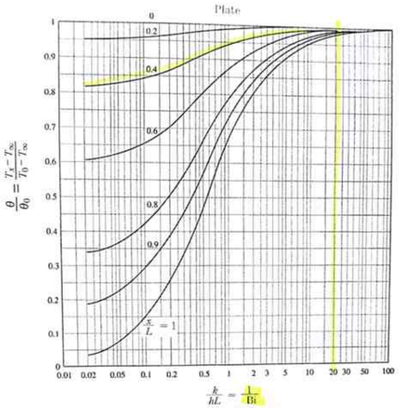
① **4-1. 집중 열용량계** : 온도구배가 무시되는 경우, 해석계가 작고 열전도 계수가 큰 경우 → Bi < 0.1

② **4-2. 단항 근사해법 및 온도 응답선도** : 급수 해의 첫 번째 항만 고려한 해, 단항 근사해를 선도로 도시한 해 → Fo > 0.2

③ **4-3. 반 무한 고체(Semi-infinite Solid)** : 3개의 경계조건 경우 비정상 온도(T(x,t)) 식 → 오차함수, erf 값 사용







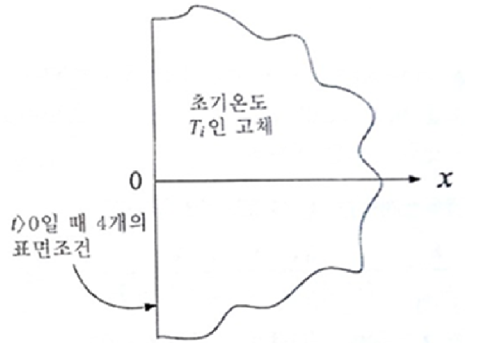


그림 4. 13 반무한 고체 내에서의 과도열전도에 대한 경계조건

Chap 4. 1차원 비정상 열전도 : T=T(x, t) or T(r,t)

4-1. 집중 열용량계 (Lumped Heat-capacity System)

1) 적용 사례 : 해석 계가 작고, 고체 내 온도 구배가 무시되는 경우, 즉, T(x, t) = T(t) only

→ 온도가 공간적으로 균일한 계이며, 온도가 시간에 따라 변할 수 있지만 주어진 시간에서 모든 지점의 온도가 동일한 계.

● 액체 속 급속 냉각되는 소형 단조물의 열 해석 적용 사례

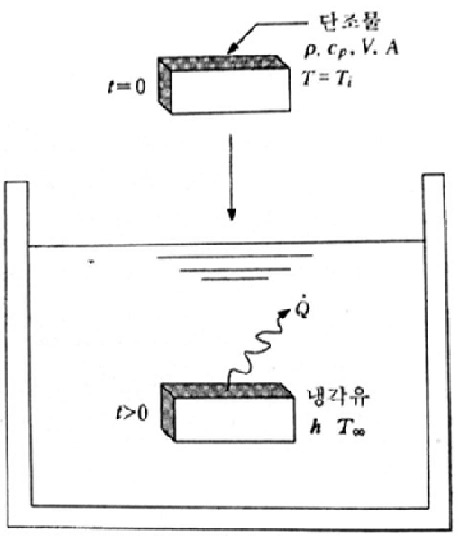


그림 4.1 액체 속에서 급속 냉각되는 소형 금속 단조물에 대한 집중 열용량계

2) 집중 열용량 해석 : Bi < 0.1

① 해석 가정

(가정1) 냉각유의 유량이 대단히 커서 단조물로부터 열전달이 일어나도 냉각유의 온도, T_∞는 일정하게 유지된다.

(가정2) 단조물의 표면에서는 대류 열전달뿐이며 열전달 계수는 h로 일정하다.

② 지배방정식 → 에너지 보존법칙(열역학 1법칙) → 단조물 내부에너지변화율 = 유체흡수 열량율

→ $$-\rho c_p V \frac{dT(t)}{dt} = hA(T(t) - T_\infty) \qquad (4.1)$$

→ 초기조건, $T(0) = T_i$ (4.2)을 적용해서 해를 무차원 형태로 구하면 다음과 같다.

→ $$\boxed{\frac{\theta(t)}{\theta_0} = \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left[-\left(\frac{hA}{\rho c_p V}\right)t\right] = e^{-mt} \qquad (4.3),\ \text{여기서}\ m = \frac{hA}{\rho c_p V}}$$

③ 해석 전제 조건

→ 고체 열저항(전도열저항)이 외부 대류열저항에 비해 매우 작아야 함!

→ $$\boxed{Bi = \frac{h(V/A)}{k} < 0.1 \qquad (4.4), \qquad Bi = \frac{hs}{k} \qquad (4.5)}$$

Chap 4. 1차원 비정상 열전도 : T=T(x, t) or T(r,t)

4-1. 집중 열용량계 (Lumped Heat-capacity System)

2) 집중 열용량계 해석

③ 해석 전제 조건

→ 고체 열저항(전도열저항)이 외부 대류열저항에 비해 매우 작아야 함!

→ $Bi = \dfrac{h(V/A)}{k} < 0.1$ (4.4) , $Bi = \dfrac{hs}{k}$ (4.5) → $Bi = \dfrac{hs}{k} < 0.1$ (4.6)

→ Bi 수가 0.1 이하인 경우 오차가 5%이하로 비교적 정확함, 그런데 0.1 이상이면, 단항 근사해법이나 온도응답곡선으로 구함!

- 특성길이, s에 해당되는 일반적인 형태의 물체 두께 혹은 반경은 다음과 같음.

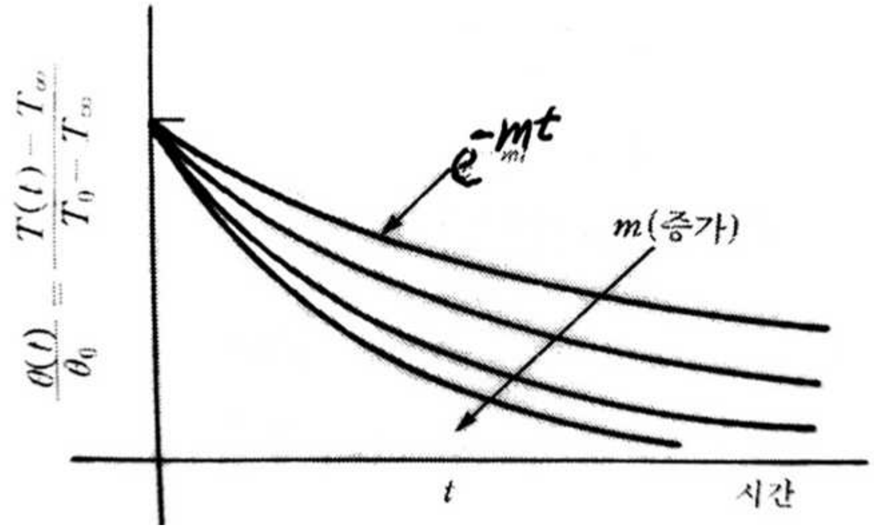
두께가 $2L$인 평판 : $s = \dfrac{V}{A} = \dfrac{HWL}{HW} = L$

반경 R인 원통 : $s = \dfrac{V}{A} = \dfrac{\pi R^2 L}{2\pi RL} = \dfrac{R}{2}$

반경 R인 구 : $s = \dfrac{V}{A} = \dfrac{4}{3}\dfrac{\pi R^3}{4\pi R^2} = \dfrac{R}{3}$

식 (4. 4)를 $Biot$수로 나타내면 식 (4. 6)과 같다.

$$Bi = \frac{hs}{k} < 0.1$$



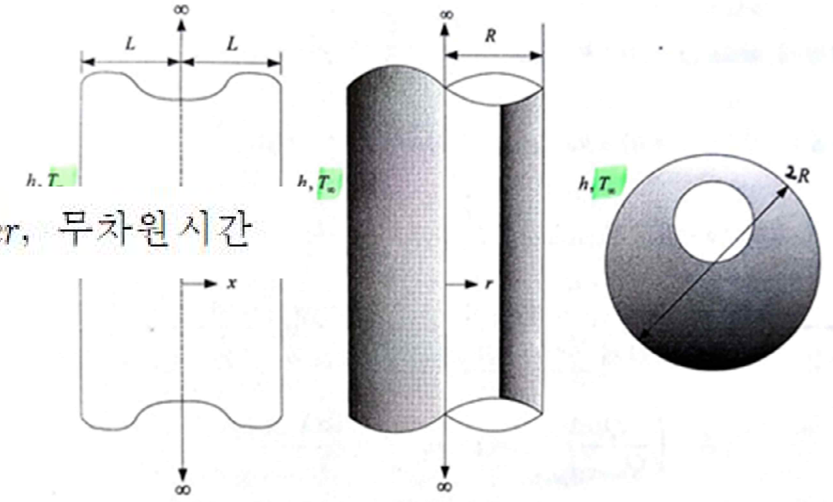
Chap 4. 1차원 비정상 열전도 : T=T(x, t) or T(r,t)

4-2. 단항 근사해법 및 온도 응답선도 : T(s,t) = T(x, t)

1) 단항 근사해법 해석 : Bi > 0.1 & F_0 > 0.2

① 해석 전제 조건

→ $Bi = \dfrac{hs}{k} > 0.1$ and $F_o = \dfrac{\alpha t}{s^2} > 0.2$, 여기서 F_o : $Fourier's\ \nu mber$, 무차원 시간



(a) 평판 (b) 원통 (c) 구

● 각 형상별 단항 근사해법의 해 : 무차원 온도분포식

$$\text{평판} : \theta(x,t)_{plate} = \frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \cos(\lambda_1 x / L),\ Fo > 0.2 \qquad (4.7)$$

$$\text{원통} : \theta(r,t)_{cylinder} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} J_0(\lambda_1 r / r_0),\ Fo > 0.2 \qquad (4.8)$$

$$\text{구} : \theta(r,t)_{sphere} = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \frac{\sin(\lambda_1 r / r_0)}{\lambda_1 r / r_0},\ Fo > 0.2 \qquad (4.9)$$

● 각 형상별 단항 근사해법의 해 : 고체중심 온도분포식

$$\text{평판의 중심}(x=0) : \theta_{0,plate} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \qquad (4.10)$$

$$\text{원통의 중심}(r=0) : \theta_{0,cylinder} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \qquad (4.11)$$

$$\text{구의 중심}(r=0) : \theta_{0,sphere} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \qquad (4.12)$$

● 각 형상별 단항 근사해법의 해 : 임의 고체지점의 온도분포식

$$\text{평판} : \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{plate} = 1 - \theta_{0,plate} \frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1} \qquad (4.13)$$

$$\text{원통} : \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{cylinder} = 1 - 2\theta_{0,cylinder} \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1} \qquad (4.14)$$

$$\text{구} : \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)_{sphere} = 1 - 3\theta_{0,sphere} \frac{\sin\lambda_1 - \cos\lambda_1}{\lambda_1^3} \qquad (4.15)$$

Chap 4. 1차원 비정상 열전도 : T=T(x, t) or T(r,t)

4-2. 단항 근사해법 및 온도 응답선도 : T(s,t) = T(x, t)

표 4.1 평면벽, 원통, 구의 1차원 비정상 열전도의 단항해에 사용되는 상수

Bi	Plane wall		Cylinder		Sphere	
	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0,01	0,0998	1,0017	0,1412	1,0025	0,1730	1,0030
0,02	0,1410	1,0033	0,1995	1,0050	0,2445	1,0060
0,04	0,1987	1,0066	0,2814	1,0099	0,3450	1,0120
0,06	0,2425	1,0098	0,3438	1,0148	0,4217	1,0179
0,08	0,2791	1,0130	0,3960	1,0197	0,4860	1,0239
0,1	0,3111	1,0161	0,4417	1,0246	0,5423	1,0298
0,2	0,4328	1,0311	0,6170	1,0483	0,7593	1,0592
0,3	0,5218	1,0450	0,7465	1,0712	0,9208	1,0880
0,4	0,5932	1,0580	0,8516	1,0931	1,0528	1,1164
0.5207 0,5	0,6533	1,0701	0,9408 (0.967514)	1,1143	1,1656	1,1441
0,6	0,7051	1,0814	1,0184	1,1345	1,2644	1,1713
0,7	0,7506	1,0918	1,0873	1,1539	1,3525	1,1978
0,8	0,7910	1,1016	1,1490	1,1724	1,4320	1,2236
0,9	0,8274	1,1107	1,2048	1,1902	1,5044	1,2488
1,0	0,8603	1,1191	1,2558	1,2071	1,5708	1,2732
2,0	1,0769	1,1785	1,5995	1,3384	2,0288	1,4793
3,0	1,1925	1,2102	1,7887	1,4191	2,2889	1,6227
4,0	1,2646	1,2287	1,9081	1,4698	2,4556	1,7202
5,0	1,3138	1,2403	1,9898	1,5029	2,5704	1,7870
6,0	1,3496	1,2479	2,0490	1,5253	2,6537	1,8338
7,0	1,3766	1,2532	2,0937	1,5411	2,7165	1,8673
8,0	1,3978	1,2570	2,1286	1,5526	2,7654	1,8920
9,0	1,4149	1,2598	2,1566	1,5611	2,8044	1,9106
10,0	1,4289	1,2620	2,1795	1,5677	2,8363	1,9249
20,0	1,4961	1,2699	2,2880	1,5919	2,9857	1,9781
30,0	1,5202	1,2717	2,3261	1,5973	3,0372	1,9898
40,0	1,5325	1,2723	2,3455	1,5993	3,0632	1,9942
50,0	1,5400	1,2727	2,3572	1,6002	3,0788	1,9962
100,0	1,5552	1,2731	2,3809	1,6015	3,1102	1,9990
∞	1,5708	1,2732	2,4048	1,6021	3,1416	2,0000

표 4.2 0차 및 1차 일종 Bessel함수 λ_1

ξ	$J_0(\xi)$	$J_1(\xi)$
0,0	1,0000	0,0000
0,1	0,9975	0,0499
0,2	0,9900	0,0995
0,3	0,9776	0,1483
0,4	0,9604	0,1960
0,5	0,9385	0,2423
0,6	0,9120	0,2867
0,7	0,8812	0,3290
0,8	0,8463	0,3688
0,9	0,8075	0,4059
1,0 (0.97)	0,7652	0,4400 (0.43)
1,1	0,7196	0,4709
1,2	0,6711	0,4983
1,3	0,6201	0,5220
1,4	0,5669	0,5419
1,5	0,5118	0,5579
1,6	0,4554	0,5699
1,7	0,3980	0,5778
1,8	0,3400	0,5815
1,9	0,2818	0,5812
2,0	0,2239	0,5767
2,1	0,1666	0,5683
2,2	0,1104	0,5560
2,3	0,0555	0,5399
2,4	0,0025	0,5202
2,6	−0,0968	−0,4708
2,8	−0,1850	−0,4097
3,0	−0,2601	−0,3391
3,2	−0,3202	−0,2613

Chap 4. 1차원 비정상 열전도 : T=T(x, t) or T(r,t)

4-2. 단항 근사해법 및 온도 응답선도 : T(s,t) = T(x, t)

2) 온도응답 선도 해석 → 단항 근사해를 도표(선도) 형태로 표시한 그래프, Heisler 선도라 함

- 온도응답 선도 해석의 변수들 : Bi 수(대류저항 대비 열전도 저항). Fo 수(무차원 경과 시간) → Bi > 0.1 & F_o > 0.2

표 4.3 각 형태의 대표길이에 대한 Bi수와 Fo수

형 태	평 판	원 통	구
Bi	hL/k	$\frac{hR}{k}$	$\frac{hR}{k}$
Fo	$\frac{\alpha t}{L^2}$	$\frac{\alpha t}{R^2}$	$\frac{\alpha t}{R^2}$

- 각 형상별 고체 내부 임의 지점과 주위 유체와의 온도 차(θ)와 고체 중심 온도(T_0)와 주위 유체온도(T_∞)와의 온도 차 (θ_0)

→ $\theta = T(x,t) - T_\infty$ (평판) (4.16a) $\theta = T(r,t) - T_\infty$ (원통,구) (4.16b)

→ $\theta_0 = T_0 - T_\infty$ (4.17) $\theta_i = T_i - T_\infty$

① 무한 평판에서 온도응답 선도

- 고체 내부 임의지점에서 온도분포 식

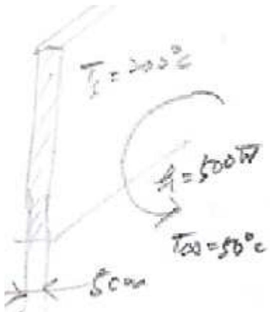
$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta_0}{\theta_i} \cdot \frac{\theta}{\theta_0} \qquad (4.18)$$

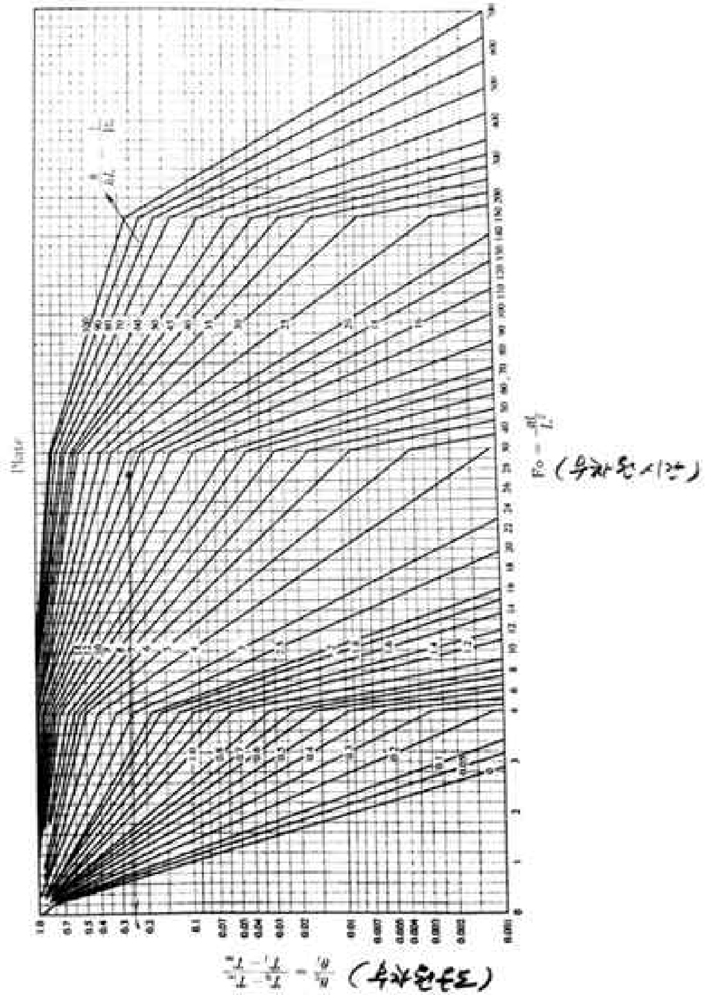
- 평판의 최대 열에너지(평형상태), Q_{max}

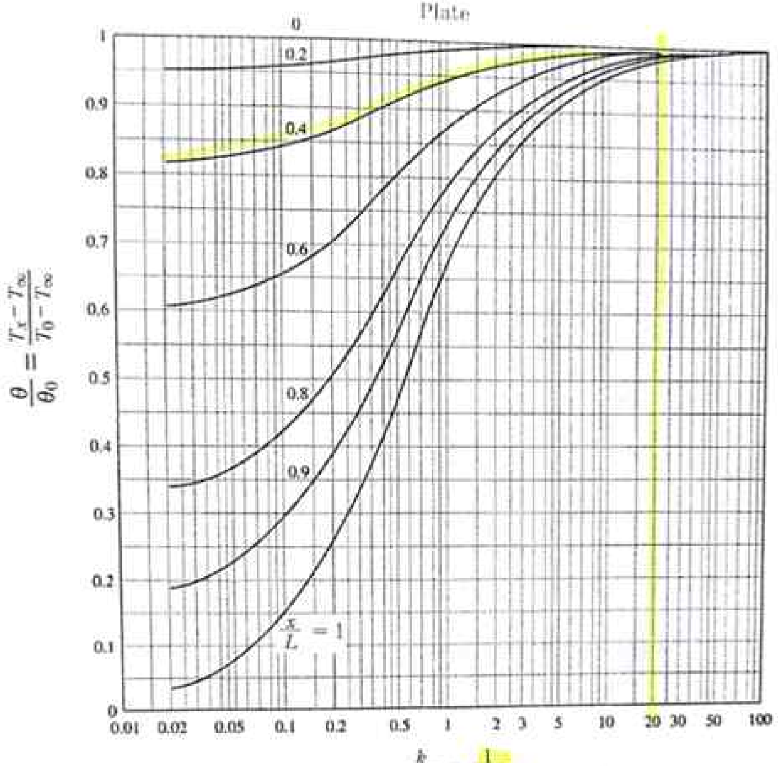
$$Q_{max} = \rho c_p V(T_i - T_\infty) = \rho c_p A2L(T_i - T_\infty) \quad (냉각) \qquad (4.19a)$$

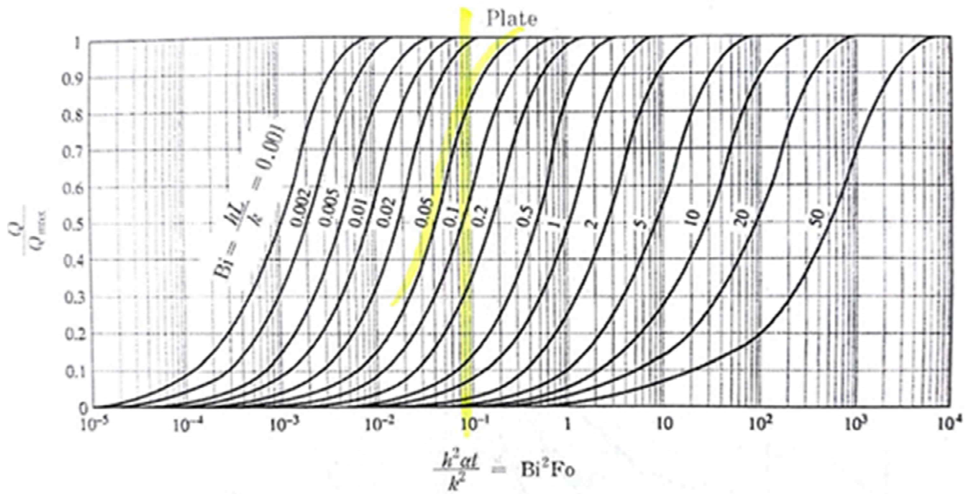
$$Q_{max} = \rho c_p V(T_\infty - T_i) = \rho c_p A2L(T_\infty - T_i) \quad (가열) \qquad (4.19b)$$

예제 4.5 물성치가 $\rho = 2702\,\mathrm{kg/m^3}$, $c_p = 903\,\mathrm{J/kg \cdot K}$, $k = 237\,\mathrm{W/m \cdot K}$, $\alpha = 9.71 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$ 이고 두께가 5 cm인 알루미늄 판이 200℃로 유지되다가 표면이 갑자기 온도 50℃, 열전달계수 $h = 500\,\mathrm{W/m^2 \cdot K}$인 유체에 노출된다. 3분 후에 깊이 1.5 cm인 곳의 온도를 구하고 3분 동안 평판에서 유체로 전달된 열량을 구하라.









예제 4.5 물성치가 $\rho = 2702\,\mathrm{kg/m^3}$, $c_p = 903\,\mathrm{J/kg\cdot K}$, $k = 237\,\mathrm{W/m\cdot K}$, $\alpha = 9.71\times10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$ 이고 두께가 5 cm인 알루미늄 판이 200℃로 유지되다가 표면이 갑자기 온도 50℃, 열전달계수 $h = 500\,\mathrm{W/m^2\cdot K}$인 유체에 노출된다. 3분 후에 깊이 1.5cm인 곳의 온도를 구하고 3분 동안 평판에서 유체로 전달된 열량을 구하라.

| 풀 이 | 평판의 초기온도와 유체온도는 $T_i = 200℃$, $T_\infty = 50℃$

열전달계수와 유체 두께의 1/2인 L은

$$h = 500\,\mathrm{W/m^2\cdot K},\quad t = 180\,s,\quad L = \frac{0.05\mathrm{m}}{2} = 0.025\mathrm{m}$$

선도로부터 무차원 온도를 찾기 위해 필요한 무차원 변수 중 Bi는

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{(500\mathrm{W/m^2\cdot K})(0.025\mathrm{m})}{(237\mathrm{W/m\cdot K})} = 0.053 < 0.1$$

∴ 집중열용량계, 중심온도(T_0) 구한후 check

따라서 Bi의 역수는 $\dfrac{1}{Bi} = \dfrac{1}{0.053} = 19.0$

*Fourier*수는 $$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{(9.71\times10^{-5}\mathrm{m^2/s})(180\mathrm{s})}{(0.025\mathrm{m})^2} = 28.0$$

무한 평판에서 중심부 이외의 온도를 구하기 위한 온도 응답 선도

집중열용량계로 해석하면,

$$m = \frac{hA}{\rho c_p V} = \frac{h}{\rho c_p (L)} = \frac{500}{2702\times903\times0.025} = 8.2\times10^{-3}$$

이상의 값으로부터 그림 4.4 (a)에서 무차원 온도를 구할 수 있다.

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \approx 0.25 \leftrightarrow e^{-mt}$$

$$\therefore \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-mt} = e^{-(8.2\times10^{-3}\times180)} = 0.22855$$

중심의 온도는

$$T_0 = 0.25(T_i - T_\infty) + T_\infty = 0.25(200-50)℃ + 50℃ = 87.5℃$$

$\therefore T_0 = 0.22855\times150+50 = 84.3(℃)$

표면으로부터 1.5cm 깊이의 온도를 구하므로

$$x = L - 0.015\,\mathrm{m} = 0.025\,\mathrm{m} - 0.015\,\mathrm{m} = 0.01\,\mathrm{m}$$

이에 대한 무차원 좌표는

$$\frac{x}{L} = \frac{0.01\mathrm{m}}{0.025\mathrm{m}} = 0.40$$

다음으로는 그림 4.5를 이용하여 $x/L = 0.4$에서 온도를 구한다.
$1/Bi = 19.0$, $x/L = 0.4$인 경우 무차원 온도는

$$\frac{\theta}{\theta_0} \approx 0.98$$

$$\therefore \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta}{\theta_0}\cdot\frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

식 (4.18)에서 무차원 온도는 다음과 같다.

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{\theta_0}{\theta_i}\cdot\frac{\theta}{\theta_0} = (0.25)(0.98) = 0.245$$

따라서 깊이 1.5cm인 곳에서 3분 후의 온도는

① 3분후 깊이 1.5cm 평판온도

$$T = 0.245(T_i - T_\infty) + T_\infty = 0.245(200-50)℃ + 50℃ = 86.8℃$$

식 (4.19)에 의해 평판의 최대 열전달량은

$$Q_{\max} = \rho c_p A 2L(T_i - T_\infty)$$

그런데 평판의 면적은 무한하므로 단위 면적당으로 계산해야 한다. 따라서

$$\frac{Q_{\max}}{A} = (2702\mathrm{kg/m^3})(903\,\mathrm{J/kg\cdot K})(0.05\mathrm{m})[(200-50)\mathrm{K}] = 18.3\mathrm{MJ/m^2}$$

파라미터 Bi^2Fo의 값은

$$Bi^2Fo = (0.053)^2(28.0) = 0.079$$

따라서 $Q/Q_{\max}$의 근사값은 그림 4. 6에서부터

$$\frac{Q}{Q_{\max}} \approx 0.7$$

이므로, 3분 동안 평판 $1\mathrm{m^2}$당 열손실량을 구하면 다음과 같다.

② 3분동안 평판의 열전달량

$$\frac{Q}{A} = \frac{0.7Q_{\max}}{A} = 0.7(18.3\,\mathrm{MJ/m^2}) = 12.8\,\mathrm{MJ/m^2}$$

Chap 4. 1차원 비정상 열전도 : T=T(x, t) or T(r,t)

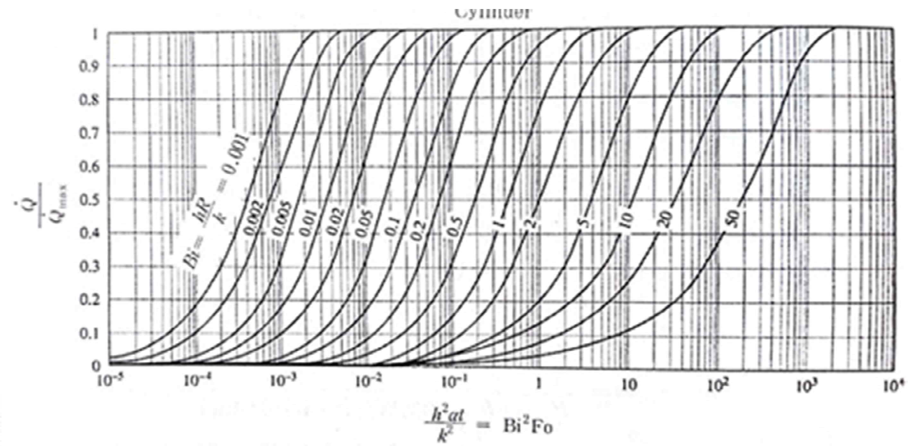
4-2. 단항 근사해법 및 온도 응답선도 : T(s,t) = T(x, t)

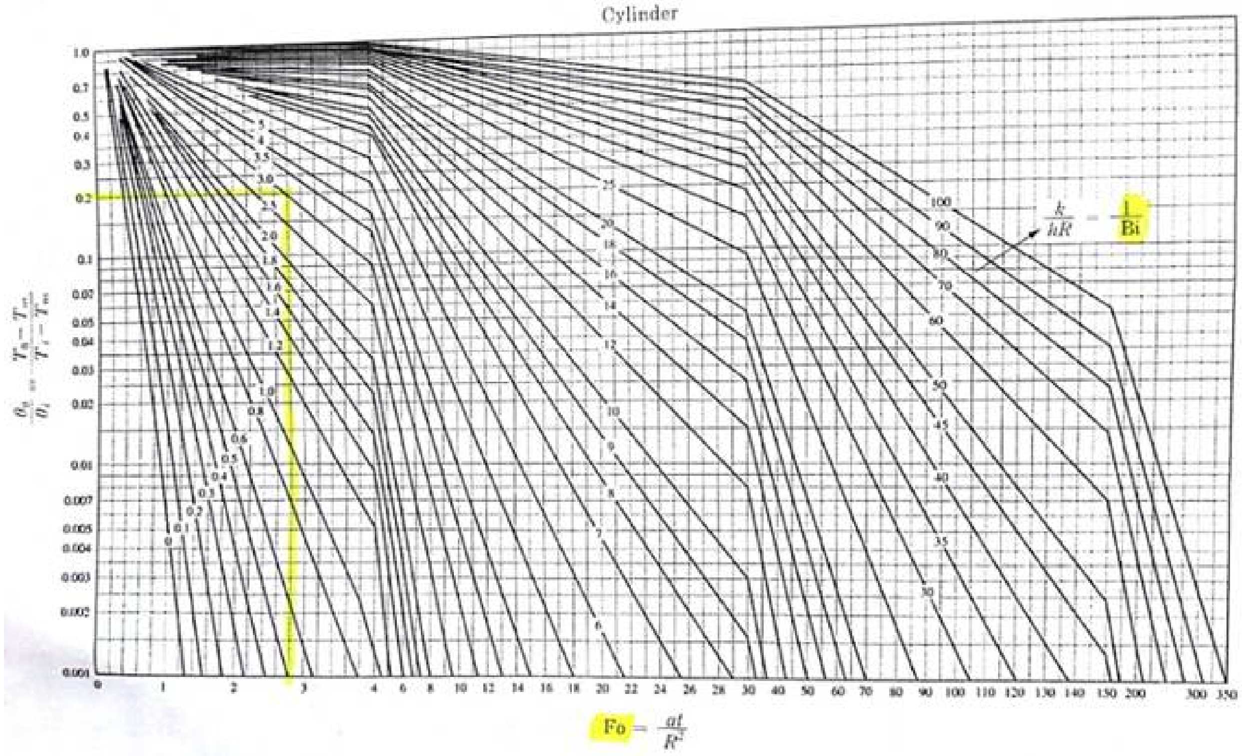
② 무한 원통에서 온도응답 선도 → <u>평판에서 해석과 동일함</u>

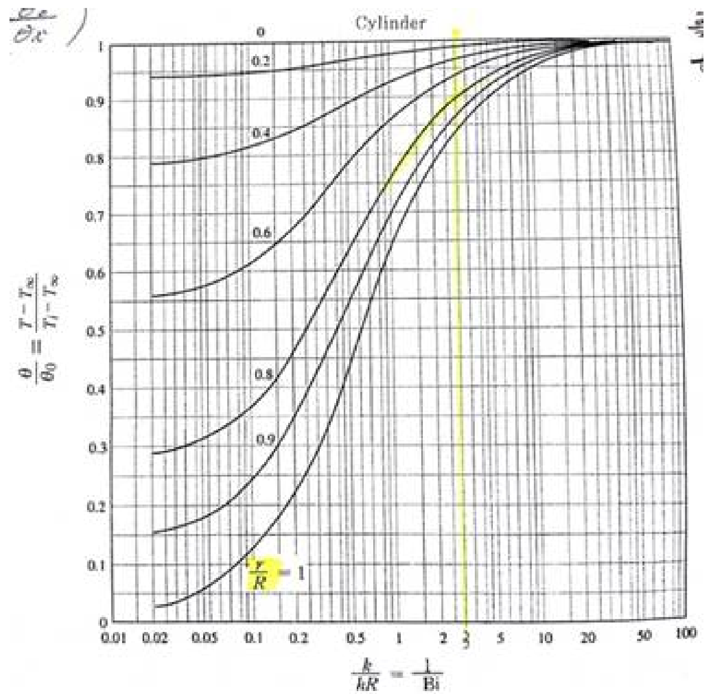
- 평판의 최대 열에너지(평형상태), Q_{max}

$$Q_{max} = \rho c_p V(T_i - T_\infty) = \rho c_p \pi R^2 L(T_i - T_\infty) \quad (\text{냉각}) \qquad (4.20a)$$

$$Q_{max} = \rho c_p V(T_\infty - T_i) = \rho c_p \pi R^2 L(T_\infty - T_i) \quad (\text{가열}) \qquad (4.20b)$$







Chap 4. 1차원 비정상 열전도 : T=T(x, t) or T(r,t)

4-3. 반 무한 고체 : T(s,t) = T(x, t)

- **무한 고체란?** 반 무한 영역($0 \ll x < \infty$)은 평한 개의 표면만 있고 다른 방향으로는 무한히 연장된 영역
- 해석 사례 : (BC) 1~3 조건에서 고체 내 각각 비정상 온도 관계식이 오차함수 형태로 주어 짐!

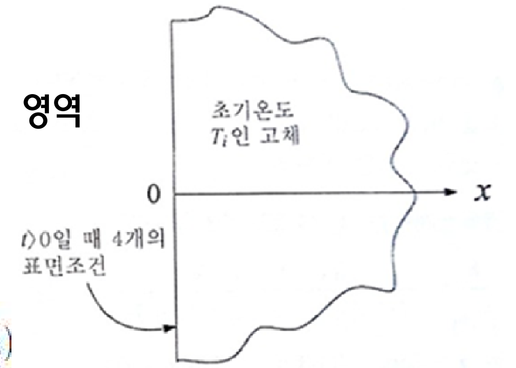


그림 4.13 반무한 고체 내에서의 과도열전도에 대한 경계조건

① Case 1 : 표면온도 To가 주어지는 경우, Dirichlet (BC) 조건

→
$$\theta(x,t) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_i - T_0} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \qquad (4.22)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad m^2/s(m^2/h) \qquad (4.23)$$

② Case 2 : 열유속이 주어지는 경우, Neuemann (BC) 조건

→
$$T(x,t) = T_i + \frac{2q}{k}(\alpha t)^{1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi^2 + \xi erf(\xi) - \xi}\right] \qquad (4.24)$$

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \qquad (4.25)$$

③ Case 3 : 대류 경계조건이 주어지는 경우, 표면평형(BC) 조건

→
$$\frac{T(x,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = erf(\xi) + \left[\exp\left(\frac{hx}{x} + \frac{h^2\alpha t}{k^2}\right)\right]\left[1 - erf\left(\xi + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)\right] \qquad (4.26)$$

예제 4.8 $\rho = 7870\text{kg/m}^3$, $c_p = 447\text{J/kg}\cdot\text{K}$, $k = 80.3\text{W/m}\cdot\text{K}$의 물성치를 갖는
로 만든 두꺼운 벽이 0℃로 유지되다가 갑자기 표면온도가 60℃로 변할 때 1분 후
깊이 3cm 인 곳의 온도를 구하라.

| 풀 이 | 열확산계수는 식 (4. 23)에서 구한다.

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{80.3\,\text{W/m}\cdot\text{K}}{(7870\text{kg/m}^3)(447\text{J/kg}\cdot\text{K})} = 2.28\times10^{-5}\,\text{m}^2/\text{s}$$

깊이와 시간은 $x = 3\text{cm} = 0.03\text{m},\, t = 1\text{min} = 60s$

초기 온도와 경계조건인 표면 온도는 각각 $T_i = 0℃,\, T_0 = 60℃$

부록으로부터 오차함수의 값을 찾기 위해서 $x/2\sqrt{\alpha t}$를 계산하면

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.03\text{m}}{2[(2.28\times10^{-5}\text{m}^2/\text{s})(60\text{s})]^{1/2}} = 0.4056$$

보간법으로 오차함수를 구하면

$$erf(0.4056) = 0.4337$$

무차원 온도는

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = 0.4337$$

깊이 3cm인 곳에서 1분 후의 온도는

$$T = 0.4337(0-60)℃ + 60℃ = 33.98℃$$

The Error Function

z	erf(z)	z	erf(z)	z	erf(z)
0.00	0.000000	0.60	0.603856	1.40	0.952285
0.02	0.022565	0.62	0.619411	1.44	0.958297
0.04	0.045111	0.64	0.634586	1.48	0.963654
0.06	0.067622	0.66	0.649377	1.52	0.968414
0.08	0.090078	0.68	0.663782	1.56	0.972628
0.10	0.112463	0.70	0.677801	1.60	0.976348
0.12	0.134758	0.72	0.691433	1.64	0.979622
0.14	0.156947	0.74	0.704678	1.68	0.982493
0.16	0.179012	0.76	0.717537	1.72	0.985003
0.18	0.200936	0.78	0.730010	1.76	0.987190
0.20	0.222702	0.80	0.742101	1.80	0.989090
0.22	0.244296	0.82	0.753811	1.84	0.990736
0.24	0.265700	0.84	0.765142	1.88	0.992156
0.26	0.286900	0.86	0.776100	1.92	0.993378
0.28	0.307880	0.88	0.786687	1.96	0.994426
0.30	0.328627	0.90	0.796908	2.00	0.995322
0.32	0.349126	0.92	0.806767	2.20	0.998137
0.34	0.369365	0.94	0.816271	2.40	0.999311
0.36	0.389330	0.96	0.825423	2.60	0.999764
0.38	0.409009	0.98	0.834231	2.80	0.999925
0.40	0.428392	1.00	0.842701	3.00	0.999978
0.42	0.447468	1.04	0.858650	3.20	0.999994
0.44	0.466225	1.08	0.873326	3.40	0.999998
0.46	0.484656	1.12	0.886788	3.60	1.000000
0.48	0.502750	1.16	0.899096	3.80	1.000000
0.50	0.520500	1.20	0.910314	4.00	1.000000
0.52	0.537899	1.24	0.920505		
0.54	0.554939	1.28	0.929734		
0.56	0.571616	1.32	0.938065		
0.58	0.587923	1.36	0.945561		

예제 4.9 $k = 2.79\,\mathrm{W/m \cdot K}$, $\alpha = 13.7 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}$ 의 물성치를 갖는 10℃인 화강암 벽이 있다. $t = 0$일 때 표면에 열유속 $\dot{q} = 900\,\mathrm{W/m^2}$의 열이 가해진다. 깊이 5cm 인 곳에서 3시간 후의 온도를 구하라.

| 풀 이 | 깊이와 시간은 $x = 5\mathrm{cm} = 0.05\mathrm{m},\ t = 3\mathrm{h} = 10{,}800\,\mathrm{s}$

초기온도와 열유속은 $T_i = 10℃$, $\dot{q} = 900\,\mathrm{W/m^2}$

오차함수를 구하기 위해 변수 ξ를 식 (4. 24)으로 계산하면

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.05\mathrm{m}}{2[13.7 \times 10^{-7}\mathrm{m^2/s})(10{,}800\,\mathrm{s})]^{1/2}} = 0.2055$$

0.2055에 대한 오차함수는

$$erf(0.2055) = 0.2286$$

따라서 깊이 5cm 인 곳에서 3시간 후의 온도는 식 (4. 24)에 대입하여 구할 수 있다.

$$T(x,t) = T_i + \frac{2q}{k}(\alpha t)^{1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi^2} + \xi\ erf(\xi) - \xi\right] = 10℃ + \frac{2 \times 900}{2.79}$$

$$\times (13.7 \times 10^{-7} \times 10{,}800)^{1/2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-0.2055^2} + 0.2055\ erf(0.2055) - 0.2055\right]$$

$$= 40.0℃$$

The Error Function

z	erf(z)	z	erf(z)	z	erf(z)
0.00	0.000000	0.60	0.603856	1.40	0.952285
0.02	0.022565	0.62	0.619411	1.44	0.958297
0.04	0.045111	0.64	0.634586	1.48	0.963654
0.06	0.067622	0.66	0.649377	1.52	0.968414
0.08	0.090078	0.68	0.663782	1.56	0.972628
0.10	0.112463	0.70	0.677801	1.60	0.976348
0.12	0.134758	0.72	0.691433	1.64	0.979622
0.14	0.156947	0.74	0.704678	1.68	0.982493
0.16	0.179012	0.76	0.717537	1.72	0.985003
0.18	0.200936	0.78	0.730010	1.76	0.987190
0.20	0.222702	0.80	0.742101	1.80	0.989090
0.22	0.244296	0.82	0.753811	1.84	0.990736
0.24	0.265700	0.84	0.765142	1.88	0.992156
0.26	0.286900	0.86	0.776100	1.92	0.993378
0.28	0.307880	0.88	0.786687	1.96	0.994426
0.30	0.328627	0.90	0.796908	2.00	0.995322
0.32	0.349126	0.92	0.806767	2.20	0.998137
0.34	0.369365	0.94	0.816271	2.40	0.999311
0.36	0.389330	0.96	0.825423	2.60	0.999764
0.38	0.409009	0.98	0.834231	2.80	0.999925
0.40	0.428392	1.00	0.842701	3.00	0.999978
0.42	0.447468	1.04	0.858650	3.20	0.999994
0.44	0.466225	1.08	0.873326	3.40	0.999998
0.46	0.484656	1.12	0.886788	3.60	1.000000
0.48	0.502750	1.16	0.899096	3.80	1.000000
0.50	0.520500	1.20	0.910314	4.00	1.000000
0.52	0.537899	1.24	0.920505		
0.54	0.554939	1.28	0.929734		
0.56	0.571616	1.32	0.938065		
0.58	0.587923	1.36	0.945561		

0.142

0.20

4056

0.4331

예제 4.10 $k = 1.9\,\mathrm{W/m \cdot K}$, $\alpha = 9.42 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2/s}$의 물성치를 갖는 콘크리트 벽이 30℃로 유지되고 있다가 벽의 표면이 갑자기 10℃의 물로 냉각된다. 물과 벽 사이의 대류열전달계수가 $h = 400\,\mathrm{W/m^2 \cdot K}$일 때 깊이 1cm인 곳에서 냉각 20분 후의 온도를 구하라.

| 풀 이 | 깊이와 시간은 $x = 1\mathrm{cm} = 0.01\mathrm{m},\ t = 20\mathrm{min} = 1200\,s$

콘크리트의 초기온도, 물의 온도와 열전달계수는 각각

$$T_i = 30℃,\quad T_\infty = 10℃,\quad h = 400\,\mathrm{W/m^2 \cdot K}$$

식 (4.26)에 나타나는 변수 ξ를 계산하면

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.01\mathrm{m}}{2[9.42 \times 10^{-7}\mathrm{m^2/s})(1200\mathrm{s})]^{1/2}} = 0.1487$$

식 (4.26)에 대입하기 전에 다음 값을 미리 계산한다.

$$\frac{hx}{k} = \frac{(400\,\mathrm{W/m^2 \cdot K})(0.01\mathrm{m})}{1.9\mathrm{W/m \cdot K}} = 2.11$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{(400\,\mathrm{W/m^2 \cdot K})\sqrt{(9.42 \times 10^{-7}\mathrm{m^2/s})(1200\mathrm{s})}}{1.9\,\mathrm{W/m \cdot K}} = 7.08$$

또한 $\dfrac{h^2 \alpha t}{k^2} = 7.08^2 = 50.1$

이 결과들을 식 (4.26)에 대입하면

$= 0.156947 + \dfrac{0.0087}{0.02} \times (0.179012 - 0.156947)$
$= 0.166545 \simeq 0.1665$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = erf(0.1487) + [\exp(2.11 + 50.1)][1 - erf(0.1487 + 7.08)]$$
$$= erf(0.1487) + \boxed{[\exp(52.2)][1 - erf(7.23)]}$$
$$= erf(0.1487) + 0 = 0.1665$$

$\simeq 0$

깊이 1cm인 곳에서 20분 후의 온도는 다음과 같다.

$$T = 0.1665\,(T_i - T_\infty) + T_\infty = 0.1665\,(10 - 30)℃ + 30℃ = \underline{26.7℃}$$

The Error Function

z	erf(z)	z	erf(z)	z	erf(z)
0.00	0.000000	0.60	0.603856	1.40	0.952285
0.02	0.022565	0.62	0.619411	1.44	0.958297
0.04	0.045111	0.64	0.634586	1.48	0.963654
0.06	0.067622	0.66	0.649377	1.52	0.968414
0.08	0.090078	0.68	0.663782	1.56	0.972628
0.10	0.112463	0.70	0.677801	1.60	0.976348
0.12	0.134758	0.72	0.691433	1.64	0.979622
0.14	0.156947	0.74	0.704678	1.68	0.982493
0.16	0.179012	0.76	0.717537	1.72	0.985003
0.18	0.200936	0.78	0.730010	1.76	0.987190
0.20	0.222702	0.80	0.742101	1.80	0.989090
0.22	0.244296	0.82	0.753811	1.84	0.990736
0.24	0.265700	0.84	0.765142	1.88	0.992156
0.26	0.286900	0.86	0.776100	1.92	0.993378
0.28	0.307880	0.88	0.786687	1.96	0.994426
0.30	0.328627	0.90	0.796908	2.00	0.995322
0.32	0.349126	0.92	0.806767	2.20	0.998137
0.34	0.369365	0.94	0.816271	2.40	0.999311
0.36	0.389330	0.96	0.825423	2.60	0.999764
0.38	0.409009	0.98	0.834231	2.80	0.999925
0.40	0.428392	1.00	0.842701	3.00	0.999978
0.42	0.447468	1.04	0.858650	3.20	0.999994
0.44	0.466225	1.08	0.873326	3.40	0.999998
0.46	0.484656	1.12	0.886788	3.60	1.000000
0.48	0.502750	1.16	0.899096	3.80	1.000000
0.50	0.520500	1.20	0.910314	4.00	1.000000
0.52	0.537899	1.24	0.920505		
0.54	0.554939	1.28	0.929734		
0.56	0.571616	1.32	0.938065		
0.58	0.587923	1.36	0.945561		