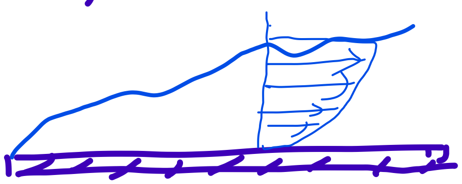
Chap. 8 강제내부유동

압력강하

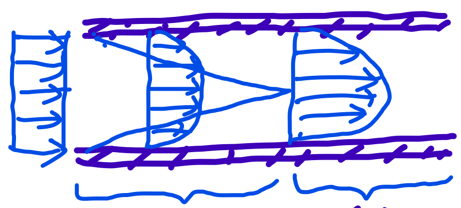
8-1. 서론 8-2. 유량과 Re수 8-3. 속도 및 경계층 8-4. 마찰인자와
8-5. 열에너지평형 8-6. 층류의 열전달계수(Nu) 8-7. 난류 Nu

8-1. 서론

- 내부유동: pipe, Duct 내부의 유체온도차를 변화하여 의한 열전달
  - → 경계층 생성에 제한: 입구(entrance) & 발달(fully develope) 영역
  - cf. 외부유동: 경계층 생성에 제한이 없음.



(외부유동)



입구영역 발달영역

- 비원형 pip or Duct → 수력직경(D_h)로 원형 식으로 등가
  - → $D_h = \dfrac{4A_c}{p}$, where A_c: 단면적, p: 접수길이
- 유동(질량($\dot{m}$) & 체적($\dot{V}$)유량)과 Reynold 수 관계

8-2. 유량과 Reynolds 수

① 유량 : 질량유량($\dot{m}$) ⇒ $\dot{m} = \rho U_m A$, 체적유량($\dot{V}$) ⇒ $\dot{V} = U_m A$

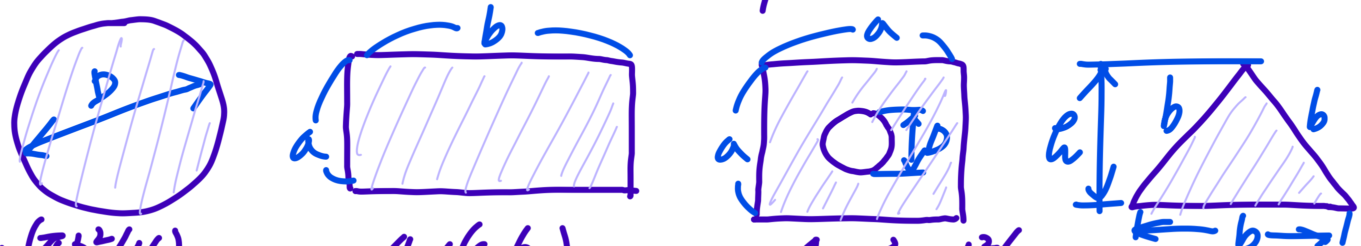
② Reynold 수 (Re) ⇒ 내부유동에서는 유속(U_m)을 유량기반으로 구함

○ 원형인 pipe(D) : $\dot{m} = \rho U_m A$에서 $A = \frac{\pi}{4}D^2$이므로 $U_m = \frac{4\dot{m}}{\rho \pi D^2}$임.

$$\therefore Re = \frac{U_m \cdot D}{(\mu/\rho)} = \frac{4\dot{m} \cdot D}{\rho \pi D^2 \cdot (\mu/\rho)} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu} \text{ or } \frac{4\dot{V}}{\pi D \nu} \quad \cdots\cdots (8\text{-}5, 6)$$

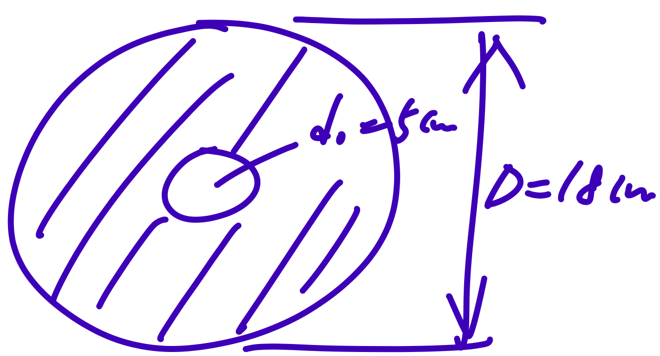
③ 비원형인 경우 : 수력반경(D_h) → Re_D, Nu_D, f(마찰인자) 계산에 사용

○ 수력반경(D_h) 정의 : $D_h = \frac{4A_c}{P}$



$D_h = \frac{4\times(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$, $\frac{4\times(ab)}{2(a+b)} = \frac{2ab}{(a+b)}$, $A = a^2 - \pi D^2/4$, $P = 4a + \pi D$, $\left(\begin{matrix} A = bh/2 \\ P = 3b \end{matrix} \right)$

(EX) 8-2



동심원관, $U_m = 6$ m/s, $\nu = 16.19 \times 10^{-6}$ m²/s

$Re_D = ?$ $A_c = \frac{\pi}{4}(D^2 - d_o^2) = 0.0235 (m^2)$

$P = \pi(D + d_o) = 0.7266$ (m)

$$\therefore D_h = \frac{4 \times A_c}{P} = \frac{4 \times 0.0235}{0.7266} = 0.130 (m)$$

$$\therefore Re_D = \frac{U_m \cdot D_h}{\nu} = 4.82 \times 10^4$$

(Ans)

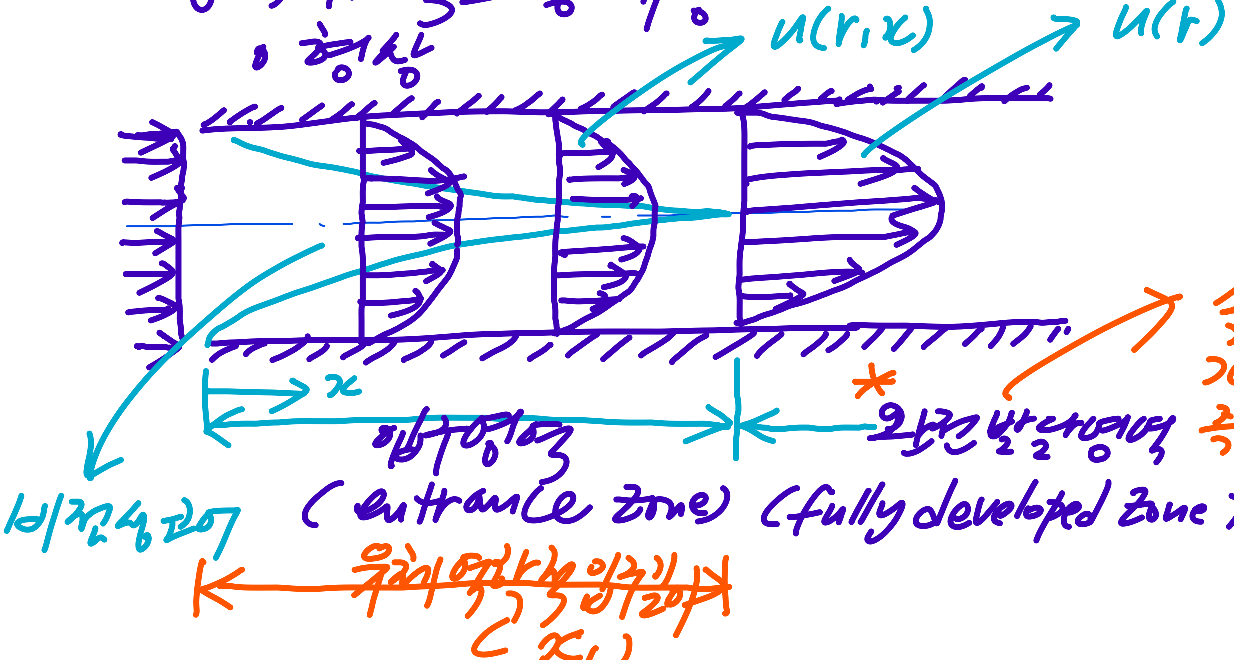
8-3. 속도 및 열경계층

8-3-1. 속도경계층

○ 형상

for 내부유동

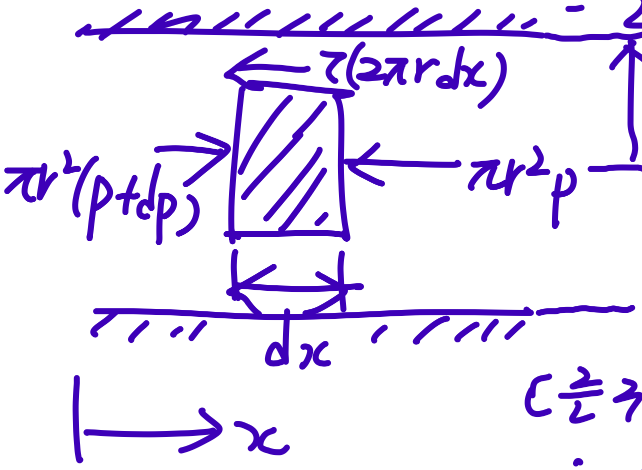
- 층류 $Re_D \le 2300$
- 천이 $2300 < Re_D < 1\times10^4$
- 난류 $Re_D > 1\times10^4$



속도분포가 더 이상 x에 대해 변하지 않음 즉, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ∴ 이 영역의 속도는 오로지 반경(r) 방향 함수 즉, u(r)

- 층류 : $(x_h/D)_{lam} \approx 0.05 Re_D$, 난류 : $10 < \left(\frac{x_h}{D}\right)_{turb} < 60$

○ 속도분포 for 완전발달영역



- $\Sigma F_x = 0 = (p+dp)\pi r^2 - \pi r^2 p - \tau(2\pi r dx)$ 임.

$\tau = \mu \frac{du}{dr}$ 이므로 윗식에 대입해서 정리하면,

$du = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} r\,dr$ 이고 이를 적분하면,

$$u(r) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\int r\,dr = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{r^2}{2} + C \quad \cdots\cdots (8\text{-}13)$$

[경계조건 (B.C), $r=R \rightarrow u(r)=0$

$$\therefore u(r) = -\frac{1}{4}\frac{dp}{dx}R^2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad \cdots\cdots (8\text{-}14)$$

○ 평균속도(u_m) for 완전발달영역

from (8-14), $u_m = \frac{\int \rho u(r)\, dA}{\rho A} = \frac{2\pi\rho}{\rho\pi R^2}\int_0^R u(r) r\cdot dr = \frac{2}{R^2}\int_0^R u(r) r\, dr$ (8-15)

(8-14) → (8-15)에 대입해서 정리하면,

$$\therefore u_m = -\frac{R^2}{8\mu}\frac{dP}{dx} \quad \cdots (8\text{-}16)$$

⟹ 질량유량($\dot{m}$)을 통해 u_m을 구하면 이식을 통해 압력구배(dP/dx)를 구할 수 있음!!

식(8-14) & (8-16)을 통해 최종 층류내부유동의 속도분포식은,

$$\frac{u(r)}{u_m} = 2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad \cdots (8\text{-}17)$$

→ $u_{max} = 2u_m$ (중심)

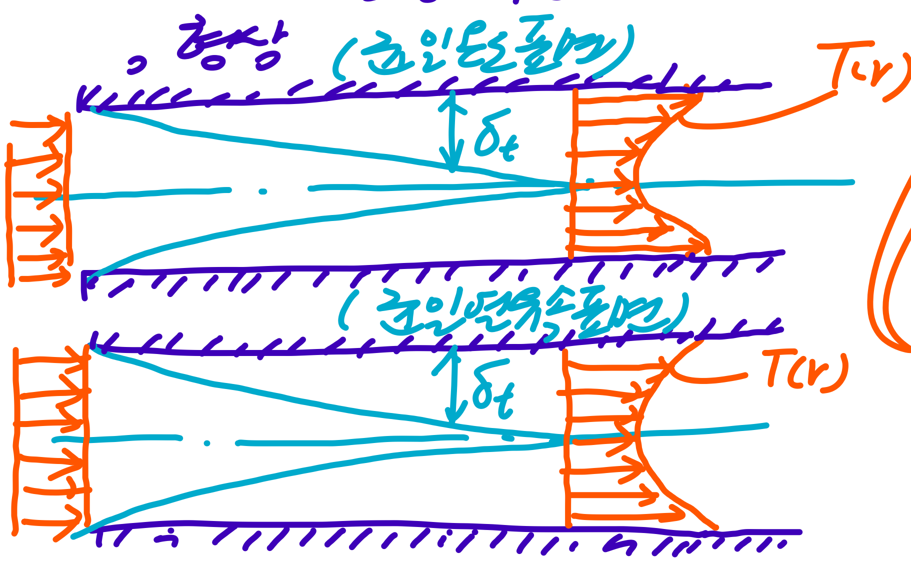
○ 난류유동의 경우

– 유체역학적입구길이 $(x_h)_{turb}$: $10 < \left(\frac{x}{D}\right)_{turb} < 60$

– 난류내부유동식 : 해석적으론 불가능하며, 실험적으로 구함.

8-3-2. 열경계층

○ 층상



○ 열적입구길이 (x_t, thermal entrance length)

– 층류 : $\left(\frac{x_t}{D}\right)_{lam} \approx 0.05 Re_D \cdot Pr$

– 난류 : $\left(\frac{x_t}{D}\right)_{tur} > 10$

8-4. 마찰인자 (f) 와 압력강하 (Δp)

∘ 압력강하 (Δp)

$$\Longrightarrow \dot{P}_{ower} = \Delta p \cdot \dot{V} \quad (8\text{-}21)$$

where Δp : 압력강하 [N/m^2], $\dot{V}$: 체적유량 [m^3/s]

P_{ower} : 내부유동에 필요한 소요동력 (Watt)

∘ 압력강하 vs 마찰인자 (f) 상관식 ← By Darcy eq'n

$$\Longrightarrow f = \frac{\Delta p}{(l/D)\,\rho u_m^2/2} \quad \cdots (8\text{-}22)$$

where, l : pipe 길이, D or D_h : 직경

u_m : 평균속도

⟹ ∴ 관내 마찰계수 (f) 값을 알면 윗식으로부터 Δp를 알 수 있음!

– 층류유동 : $f = \dfrac{64}{Re_D}$ $\cdots (8\text{-}23)$

– 난류유동 : Moody 선도 or 마찰인자 근사식 사용

$$f = 0.316\, Re^{-0.25} \quad \text{for } Re < 2\times10^4 \quad \cdots (8\text{-}24)$$

$$f = 0.184\, Re^{-0.2} \quad \text{for } 2\times10^4 < Re < 3\times10^5 \quad \cdots (8\text{-}25)$$

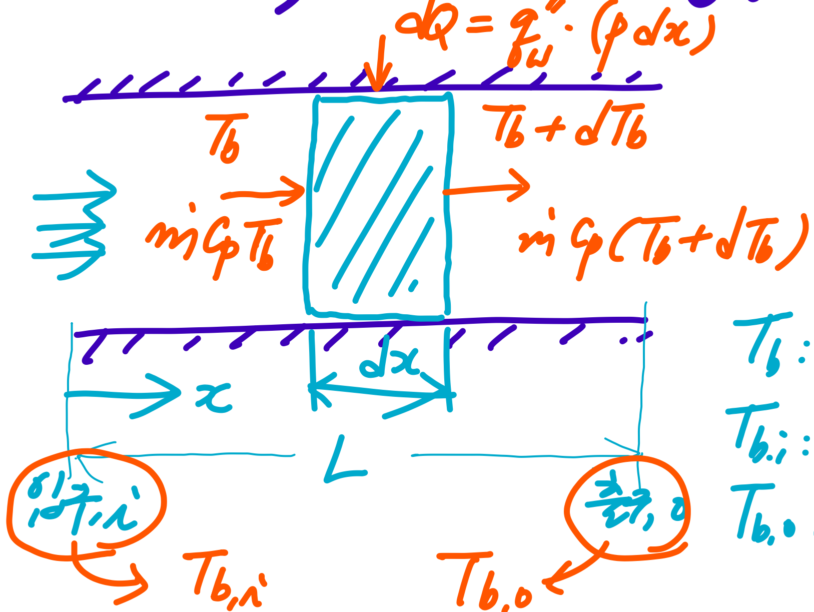
(완전 발달 난류 영역)

$$f = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{1}{3.7(D/\lambda)} + \frac{5.74}{Re_D^{0.9}}\right)\right]^2} \quad \cdots (8\text{-}26)$$

for 천이 및 전체 난류영역

8-5. 열에너지평형 → 유체의 혼합출구온도($T_{b,o}$), ΔT_{lm} 구하기

○ 미소검사체적에 대한 Energy 평형식 유도



T_b : bulk temp.

$T_{b,i}$: 입구 〃

$T_{b,o}$: 출구 〃

$\dot{Q} = \dot{m} C_p (T_{b,o} - T_{b,i}) =$

- ① for $q''_w = \text{const.}$ • $q''_w \cdot A = q''_w \cdot (\pi D) L$
- ② for $T_w = \text{const.}$ • $h_m \cdot A \cdot \Delta T_{lm}$ ($A \to (\pi D L)$)

$$\dot{Q} = \dot{m} C_p (T_{b,o} - T_{b,i}) = q''_w \cdot (\pi D L) \Rightarrow d\dot{Q} = \dot{m} C_p \, dT_b = q''_w \cdot \pi D \cdot dx \quad (\pi D \to p)$$

즉, $\dot{m} C_p \, dT_b = q''_w \cdot p \cdot dx$ 에서 $\therefore \dfrac{dT_b}{dx} = \dfrac{q''_w \cdot p}{\dot{m} C_p}$ 이고 $q''_w = h (T_w - T_b)$ 이므로

$$\therefore \boxed{\frac{dT_b}{dx} = \frac{p \cdot h}{\dot{m} C_p} (T_w - T_b)} \text{ 이다.} \cdots (8\text{-}30) \quad \left(\frac{p \cdot h}{\dot{m} C_p} \to \text{const.}\right)$$

여기서, let $(T_w - T_b) \equiv \Delta T$ 라하면

즉, $T_b = T_w - \Delta T$ 이니 ($\because T_w = \text{const.}$)

$dT_b = dT_w - d(\Delta T) = -d(\Delta T)$

$\therefore \dfrac{dT_b}{dx} = \dfrac{-d(\Delta T)}{dx} = \dfrac{ph}{\dot{m} C_p} \Delta T$

⇒ 즉, $\dfrac{dT_b}{dx} = -\dfrac{d(\Delta T)}{dx} = \dfrac{ph}{\dot{m} C_p} \Delta T$ 인데, 변수분리하면,

$\dfrac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\dfrac{ph}{\dot{m} C_p} dx$ 이다. 이를 적분하면,

$$\int_{\Delta T_i}^{\Delta T_o} \frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\frac{p}{\dot{m} C_p} \int_0^L h \, dx, \quad \ln(\Delta T_o / \Delta T_i) = -\frac{pL}{\dot{m} C_p} \int_0^L \frac{1}{L} h \, dx = -\frac{pL}{\dot{m} C_p} h_m$$

($\int_0^L \frac{1}{L} h \, dx \to h_m$)

8-3-1. 등온표면 ($T_w = const.$)

식 8-30에서 $T_w - T_b = \Delta T$로 놓고 다시 정리하면, 前 page에서와 같이

$$\ln\left(\Delta T_o / \Delta T_i\right) = -\frac{pL}{\dot{m} C_p} h_m \ (\text{관 전체}) \quad or \quad -\frac{px}{\dot{m} C_p} h_m \ (\text{관 입구부}) \quad \cdots (8\text{-}32)$$

where, $\Delta T_o = (T_w - T_{b,o})$, $\Delta T_i = (T_w - T_i)$, $p = \pi D$

$$\therefore \frac{(T_w - T_{b,o})}{(T_w - T_{b,i})} = \exp\left(-\frac{p x h_m}{\dot{m} C_p}\right)$$

이고, $\Delta T_{lm} = \dfrac{(T_w - T_{b,o}) - (T_w - T_{b,i})}{\ln\left[(T_w - T_{b,o})/(T_w - T_{b,i})\right]}$ → 대수평균온도차

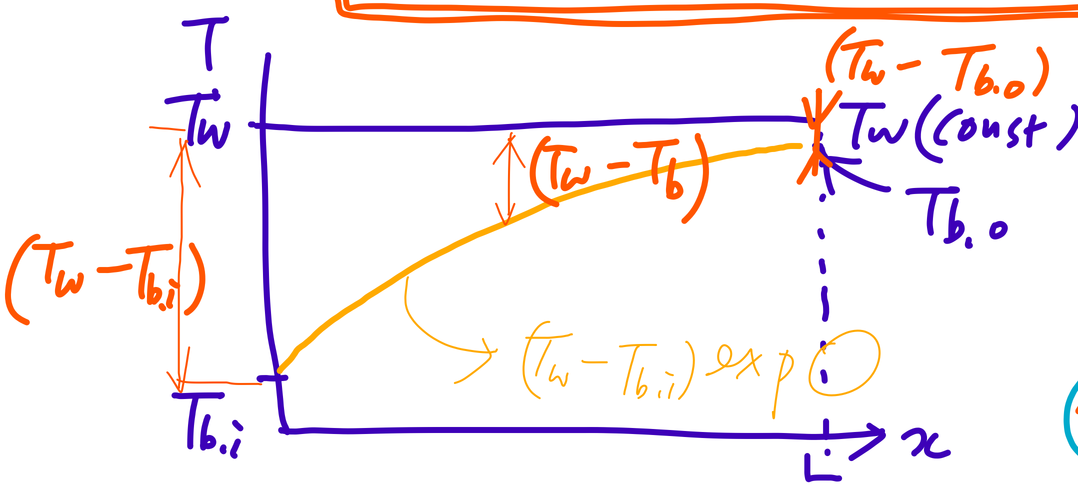
등온표면에서 열전달율($\dot{Q}$)는

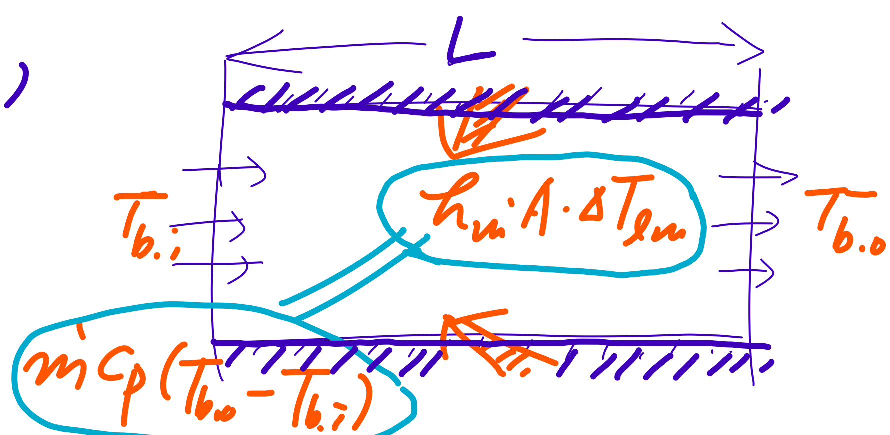
$$\dot{Q} = h_m \cdot A \cdot \Delta T_{lm} \quad (8\text{-}34)$$

where ΔT_{lm} : 대수평균온도차, A : $\pi D L$

or

$$\dot{Q} = \dot{m} C_p (T_{b,o} - T_{b,i}) \quad (8\text{-}28)$$





8-3-2. 균일 열유속 표면 ($q_w'' = const.$)

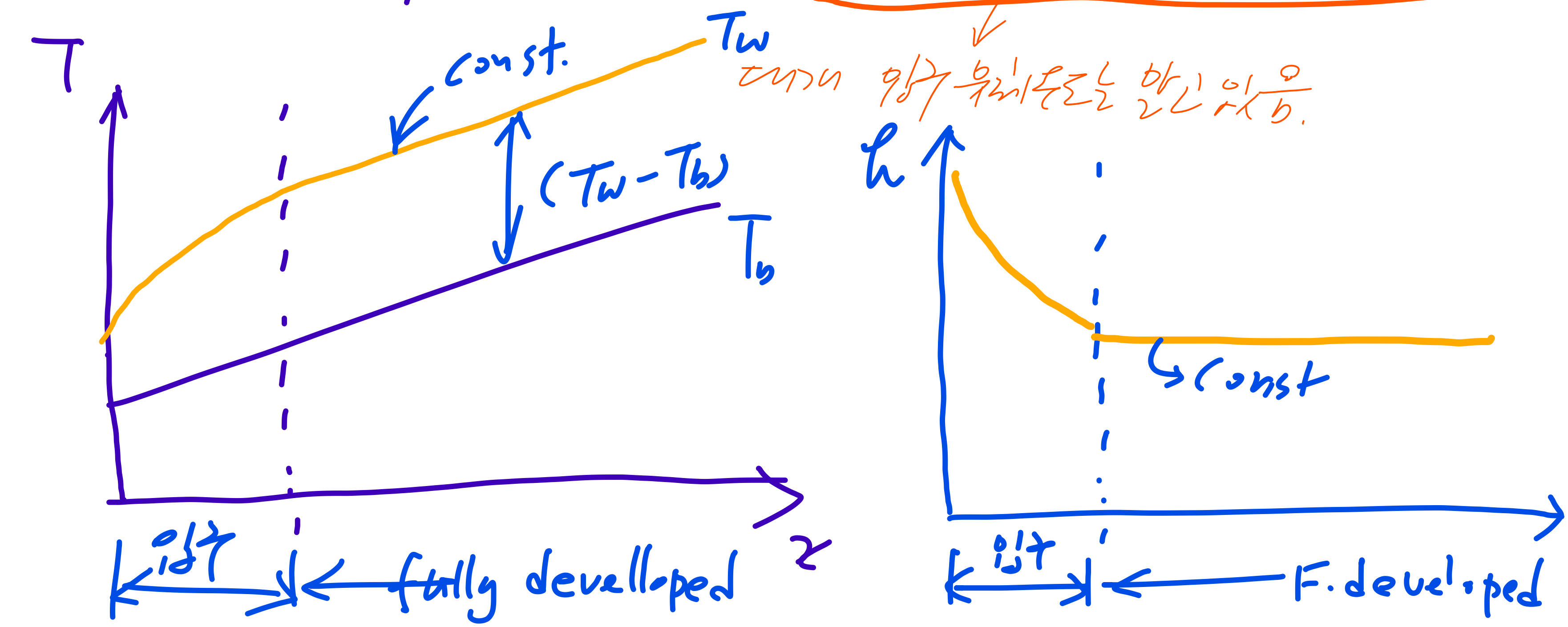
○ 균일 열유속 표면과의 임의 위치에서의 유체온도 ($T_b(x)$)

from (8-30), 즉, $\frac{dT_b}{dx} = \frac{q_w'' \cdot P}{\dot{m} c_p}$ 에서

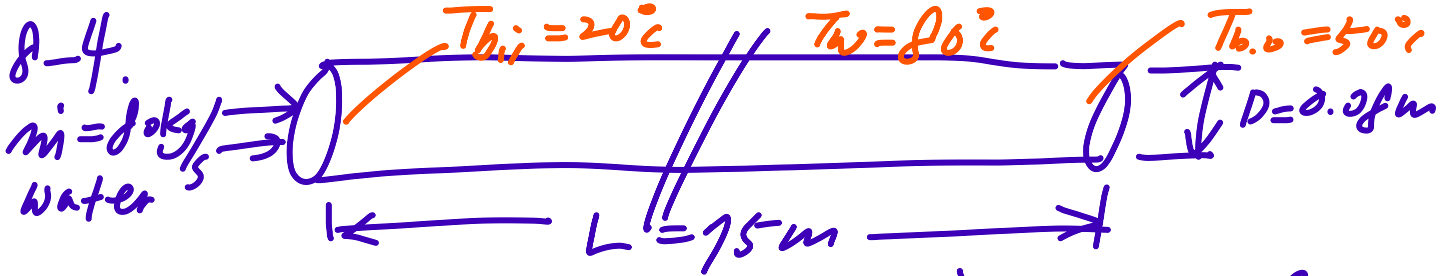
$dT_b = \frac{q_w'' \cdot P}{\dot{m} c_p} dx$ 이고, 적분하면

$$\int_0^x dT_b = \frac{q_w'' \cdot P}{\dot{m} c_p} \int_0^x dx \Rightarrow T_b(x) = T_{b,i} + \frac{q_w'' \cdot P}{\dot{m} c_p} \cdot x \quad \text{— (8-38)}$$

따라서 입구 유체온도는 알고 있음.



EX. 8-4.



Find (a) 필요 pump power (b) $\dot Q$ =? (c) h_m=?

(a) pump power → $P=\Delta p\cdot\dot V$ 에서 By Darcy eq'n, $\Delta p=f\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{\rho u_m^2}{2}$

- $\dot V=\frac{\dot m}{\rho}$ 이고 ρ는 혼합평균온도, $T_{m.b}=\frac{T_{b,i}+T_{b,o}}{2}=\frac{20+50}{2}=35°C$

→ for 35°C water, $\rho=994\,kg/m^3$, $c_p=4183\,kJ/kgK$, $\mu=719.6\times10^{-6}\,kg/m\cdot s$

∴ $Re_D=\frac{4\dot m}{\pi D\mu}=\frac{4\times80}{\pi\times0.08\times719.6\times10^{-6}}=1.77\times10^{6}$ ∴ 난류유동!

- f (마찰계수): By eq'n (8-26), $f=\left[\frac{0.25}{[\log(\frac{1}{3.7(D/\lambda)}+\frac{5.74}{Re_D^{0.9}})]^2}\right]=0.0195$

where, λ(상대거칠기) → Table 8-1 or Moody diagram 이용...

- pump power (P) $=\Delta p\cdot\dot V=\left(f\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{\rho u_m^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{\dot m}{\rho}\right)=0.0195\cdot\frac{15}{0.08}\cdot\frac{994}{2}\cdot16^2\cdot\frac{80}{994}$

where, $u_m=(\dot m/\rho A)=16.0\,(m/s)$ $=$ **168 kW** (Ans)

(b) $\dot Q=\dot m c_p(T_{b,o}-T_{b,i})=80\frac{kg}{s}\times4183\frac{kJ}{kgK}\times(50-20)K=1\times10^{7}(W)=$ **10MW** (Ans)

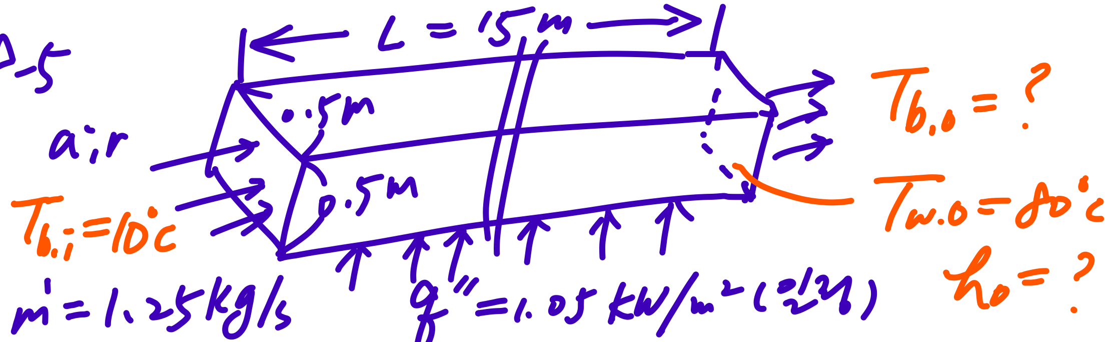
(c) h_m=? • 방법1: By eq'n (8-33), $(T_w-T_{b,o})/(T_w-T_{b,i})=\exp\left(-\frac{PLh_m}{\dot m c_p}\right)$ 에서

$h_m=-\frac{\dot m c_p}{PL}\ln((T_w-T_{b,o})/(T_w-T_{b,i}))$ $=$ **$1.23\times10^{4}\,(W/m^2K)$**

• 방법2: ΔT_{lm} 으로 ΔT_{lm}을 구한 후, (b)에서 구한 $\dot Q=h_m\cdot A\cdot\Delta T_{lm}$ 이므로

∴ $h_m=\frac{\dot Q}{A\cdot T_{lm}}=10MW/[(\pi DL)\times\Delta T_{lm}]=1.23\times10^{4}$ 으로 ← same!

(EX) 8-5



물성치 (입구온도 10°C 기준)

→ $c_p = 1007$ J/kgK

① (Given data : $\dot{m} = 1.25$ kg/s, $q''_w = 1.05$ kW/m², $T_{b,i} = 10°C$, $T_{w,o} = 80°C$, $L = 15$ m

find $T_{b,o} = ?$ → $\dot{Q}_w = \dot{m} c_p (T_{b,o} - T_{b,i}) = q''_w \cdot (Area)$에서

$$T_{b,o} - T_{b,i} = \frac{q''_w \,(\text{표면적})}{\dot{m} c_p}$$

$$\therefore T_{b,o} = T_{b,i} + \frac{q''_w (4 \times 0.5 \times 15)}{\dot{m} c_p}$$

$$= 10 + \frac{1050 \times (4 \times 0.5 \times 15)}{1.25 \times 1007} = 35°C$$

② $h_o = ?$, $q''_w = h_o \cdot (T_{w,o} - T_{b,o})$이므로

$$\therefore h_o = q''_w / (T_{w,o} - T_{b,o}) = \frac{1050}{(80 - 35)} = 23.3\ (W/m^2K)$$